Максимальные множества булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями

Сысоева Л. Н.

Рассматривается задача о реализации булевых функций инициальными булевыми автоматами с константными состояниями и n входами, $n \geqslant 1$. Найдены все множества максимальной мощности, состоящие из булевых функций, которые могут быть реализованы одним автоматом такого типа с двумя или тремя состояниями при условии возможности произвольного порядка подачи наборов значений входных переменных на входы автомата.

Ключевые слова: булева функция, инициальный автомат, реализация булевых функций.

Пусть $P_2(n)$ — множество всех булевых функций, зависящих от фиксированных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$. Под булевым автоматом будем понимать автомат $V = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G)$ с произвольным числом входов, входным алфавитом $\{0,1\}$, выходным алфавитом $\{0,1\}$, алфавитом состояний Q, функцией перехода G и функцией выхода F. Определения автомата и инициального автомата можно найти в [1, 2]. Пусть n — число входов автомата V. Без ограничения общности будем полагать, что входы автомата V занумерованы от 1 до n и на i-й вход автомата V подается значение булевой переменной x_i. Тем самым можно считать, что в каждый момент времени на входы автомата V подается некоторый двоичный набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и для любого состояния $q \in Q$ функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является булевой функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Булев автомат V будем называть булевым автоматом с константными состояниями, если для любого $q \in Q$ функция $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является константной булевой функцией 0 или 1.

Пусть $V_{q_1} = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G, q_1)$ — инициальный булев автомат с начальным состоянием q_1 и n входами. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — упорядоченная последовательность всех двоичных наборов длины n, $n \geqslant 1$. Будем говорить, что автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при последовательной подаче на входы автомата V_{q_1} наборов из C в каждый момент $t = 1, 2, \ldots, 2^n$ на выходе автомата V_{q_1} выдается значение $f(\widetilde{\beta}_t)$. Будем также говорить, что функция f реализуется автоматом V_{q_1}, если для некоторой последовательности наборов C автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует f. Последовательность C будем называть последовательностью подаваемых наборов. Обозначим через $P(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, реализуемых автоматом V_{q_1}, а через $\overline{P(V_{q_1})}$ множество всех функций из $P_2(n)$, которые не могут быть реализованы автоматом V_{q_1}.

Под 0-состоянием булевого автомата V будем понимать состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под 1-состоянием — состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Без существенного ограничения общности мы будем рассматривать инициальные булевы автоматы, содержащие хотя бы одно 0-состояние и хотя бы одно 1-состояние, при этом начальным состоянием является 0-состояние. Множество всех таких автоматов с двумя или тремя константными состояниями и n фиксированными входами обозначим через $\mathfrak{V}_2(n)$ или $\mathfrak{V}_3(n)$ соответственно. Инициальные булевы автоматы с фиксированным числом константных состояний, реализующие максимальное возможное число булевых функций из $P_2(n)$, называются квазиуниверсальными.

В настоящей работе рассматривается задача описания множеств булевых функций из $P_2(n)$, которые могут быть реализованы одним квазиуниверсальным автоматом с двумя или тремя константыми состояниями. В работах [3, 4] получены точные значения максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых автоматами из $\mathfrak{V}_2(n)$ и $\mathfrak{V}_3(n)$ соответственно и описаны все автоматы, на которых эти оценки достигаются, при $n > 1$. Далее эти результаты сформулированы в виде теорем 1, 2, 4, 5. В работах [5, 6] исследовались вопросы реализации булевых функций формулами над автоматными функциями.

Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$ и $g : Q \times \{0,1\}^n \to Q$ — функция переходов автомата V_{q_1}. Обозначим через M множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_1, \widetilde{\alpha}) = q_2$, а через N — множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_2, \widetilde{\alpha}) = q_1$. Заметим, что автомат V_{q_1} однозначно задается множествами M и N.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 2$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ равна $\frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

Теорема 2. *При $n \geqslant 2$ автомат V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_2(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \varnothing$.*

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция, D — некоторое подмножество множества $\{0,1\}^n$. Обозначим через D_f^0 подмножество множества D, состоящее из всех таких наборов $\widetilde{\alpha}$, для которых выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, а через D_f^1 — подмножество множества D, состоящее из всех таких наборов $\widetilde{\alpha}$, для которых выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Опишем множество функций, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$. Пусть $n \geqslant 2$ и V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, определяемый множествами M и N, такими, что $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \varnothing$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на всех трех наборах множества $M \cup N$, через $\mathfrak{A}_2(V_{q_1})$ — множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на обоих наборах множества M, а через $\mathfrak{A}(V_{q_1})$ множество $\mathfrak{A}_1(V_{q_1}) \cup \mathfrak{A}_2(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}(V_{q_1})| = \frac{3}{8} \cdot 2^{2^n}$. Верна следующая теорема.

Теорема 3. *Если $n \geqslant 2$ и автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ является квазиуниверсальным, то $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}(V_{q_1})$.*

Рассмотрим автоматы из $\mathfrak{V}_3(n)$. Автоматы из $\mathfrak{V}_3(n)$ очевидным образом разбиваются на два подмножества: множество всех инициальных булевых автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, содержащих ровно одно 1-состояние (будем обозначать это множество через $\mathfrak{V}_3^0(n)$), и множество всех инициальных булевых автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, содержащих ровно одно 0-состояние, являющееся начальным (будем обозначать это множество через $\mathfrak{V}_3^1(n)$). Автоматы из множеств $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и $\mathfrak{V}_3^1(n)$ можно схематично изобразить с помощью диаграмм, представленных на рис. 1 и рис. 2 соответственно, где $A, B, K, M, T, E \subseteq \{0,1\}^n$. В кружочках, обозначающих состояния, написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — множества всех наборов, при подаче которых на вход автомата последний из состояния, из которого идет стрелка, переходит в состояние, на которое указывает стрелка. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.

Теорема 4. *Для любого $n \geqslant 6$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ равна $2^{2^n} - 2^n$.*

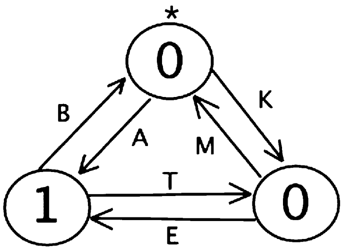

Рис. 1.

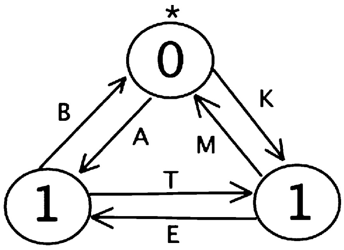

Рис. 2.

Теорема 5. *При $n \geqslant 9$ автомат V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда он принадлежит $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и задается одним из следующих наборов условий:*

1) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
2) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
3) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
4) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
5) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$,

где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}$ — различные наборы из $\{0,1\}^n$.

Из теорем 1, 2, 4, 5 следует, что в отличие от случая инициальных автоматов с двумя состояниями среди инициальных булевых автоматов с тремя константными состояниями существуют автоматы с n входами, такие, что доля реализуемых ими функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, стремится к 1 с ростом n и в отличие от случая инициального булева автомата с двумя константными состояниями, для автомата с тремя состояниями максимальная мощность множества реализуемых автоматом функций не может достигаться для любого n на автомате с фиксированной мощностью множеств A, B, K, M, T, E.

Опишем множество функций, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3(n)$. Из теоремы 5 следует, что для любого квазиуниверсального автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ выполнено $|K \cap T| = 1$ и $|(B \cup T) \backslash K| = 1$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}(V_{q_1})$ единственный набор множества $K \cap T$, а через $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$ единственный набор множества $(B \cup T) \backslash K$. Отметим, что $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}(V_{q_1}), \widetilde{\beta}(V_{q_1})\}$. Опишем все функции, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3(n)$. Обозначим через $\mathfrak{A}^q(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на не более, чем одном наборе, кроме функции, принимающей значение 0 на наборе $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}^q(V_{q_1})| = 2^n$. Верна следующая теорема.

Теорема 6. *Если $n \geqslant 6$ и автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным, то $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}^q(V_{q_1})$.*

Автор выражает искреннюю признательность Р. М. Колпакову за постановку задачи и обсуждение результатов работы и О. С. Дудаковой за ценные советы и замечания.

Список литературы

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2006.

[2] Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу «Введение в математическую логику» / Отв. ред. А. Б. Угольников. — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2007.

[3] Сысоева Л. Н. Максимальное число булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя константными состояниями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2016. — № 4. — С. 12–17.

[4] Сысоева Л. Н. Квазиуниверсальные инициальные булевы автоматы с константными состояниями // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.) / Под ред. О. М. Касим-Заде. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2016. — С. 229–232.

[5] Сысоева Л. Н. О некоторых свойствах обобщенных α-формул // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2013. — № 4. — С. 51–55.

[6] Сысоева Л. Н. О реализации булевых функций обобщенными α-формулами // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2014. — **156**, № 3. — С. 116–122.

The maximum sets of Boolean functions realized by an initial Boolean automaton with two or three constant states

Sysoeva L. N.

The problem of realization of Boolean functions by initial Boolean automata with constant states and n inputs is considered. All sets of the maximum cardinality of n-ary Boolean functions realized by an initial Boolean automaton with two or three constant states provided the possibility of an arbitrary order of input values is obtained.

Keywords: Boolean function, initial automaton, realization of functions by formulas.