

# Нижняя оценка энергопотребления для класса объёмных схем.

А. А. Ефимов<sup>1</sup>

В данной работе рассматриваются объёмные схемы, являющиеся укладкой схем функциональных элементов в пространстве. Для объёмных схем получена нижняя оценка потенциала — меры мощности, равной количеству элементов схемы, выдающих единицу на данном входном наборе. Показано, что для почти всех частичных операторов с  $n$  входами и  $m$  выходами сложность реализующей их объёмной схемы по порядку не меньше, чем  $\frac{m\sqrt[3]{d}}{\min^{2/3}(m, \log_2 d)}$ , где  $d$  — размер области определения.

**Ключевые слова:** схемы из функциональных элементов, объёмные схемы, сложность схем, мощность схемы, потенциал.

## 1. Введение

Интенсивное развитие науки и вычислительной техники в XX веке породило одну из интереснейших проблем — задачу синтеза схем, вычисляющих булевы функции и операторы. Одной из основных моделей схем является схема из функциональных элементов (СФЭ). В качестве характеристики оптимальности СФЭ можно рассматривать сложность — количество функциональных элементов, содержащихся в схеме. Таким образом, под сложностью булевой функции или оператора будем понимать минимальную сложность схемы, реализующую данную функцию или оператор. В 1956 году Д. Маллер [1] посчитал сложность любой булевой функции, а в 1965 году О.Б. Лупанов [3] вычислил сложность почти всех булевых функций в стандартном базисе.

Отметим, что в 1961 году М.Н. Вайнцвайг [2] определил другую меру сложности СФЭ — мощность. Мощность или активность СФЭ — это максимальное количество элементов схемы, выдающих на выходе единицу, где максимум берётся по всем входным наборам. О.М. Касим-Заде [6] исследовал мощность в различных базисах и установил порядок функции Шеннона для произвольного конечного базиса.

---

<sup>1</sup>Ефимов Алексей Андреевич — м.н.с каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: efimovqwerty@yandex.ru.

Efimov Alexey Andreevich — junior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Существенным недостатком модели СФЭ является то, что в ней не учитываются вполне естественные ограничения на размещение элементов схемы в плоскости или пространстве, способы их соединения, разводка проводов и т.п. В 1967 году С.С. Кравцов [4] впервые рассмотрел модель плоских прямоугольных схем, учитывающую данные ограничения. Им было показано, что порядок функции Шеннона площади плоских схем, реализующих функции от  $n$  переменных, равен  $2^n$ . Одновременно с ним А.Д. Коршунов [5] начал рассматривать два класса схем: схемы из объёмных функциональных элементов и объёмные схемы из функциональных элементов. Для обоих классов порядок функции Шеннона также равен  $2^n$ .

Интересное обобщение модели клеточных схем — многослойные  $d$ -мерные схемы были рассмотрены Т.Р. Сытдыковым [23, 24]. Если  $k$  — число слоев в  $d$ -мерной схеме, то были получены верхняя и нижняя оценки функции Шеннона сложности прямоугольных многомерных схем равны  $\Theta\left(\frac{2^n}{\min(n, d \log k)}\right)$ .

Н.А. Шкаликова в работе [7] одной из первых исследовала связь между площадью плоских схем и объёмом трёхмерных схем, реализующих булевы операторы. О.В. Черемисин [9] показал, что в классе прямоугольных схем невозможна одновременная минимизация площади и мощности плоских схем, реализующих систему всех конъюнкций.

Также интересные результаты были получены С.А. Ложкиным и другими авторами в работе [8]. Ими была получена нижняя оценка сложности одной специальной булевой функции, причём как для плоской, так и для объёмной реализации.

Особый интерес представляют работы Г.В. Калачёва [13]–[20], посвящённые плоским схемам. Автор также, как и Г.В. Калачёв, использует такую меру сложности схемы как потенциал. Он равен среднему значению количества единиц на всех внутренних узлах схемы. Неформально говоря, потенциал играет роль средней «энергии» схемы, необходимой для её функционирования. Кроме того, рассматривается и другая мера мощности — переключательная мощность — максимальное количество внутренних узлов схемы, изменяющих своё значение при изменении входных наборов схемы.

В статье [13] исследованы функции Шеннона потенциала и переключательной мощности плоских схем, реализующих булевы функции. В частности, было показано, что для рассматриваемых мер мощности получен одинаковый порядок функции Шеннона, равный  $\Theta(2^{n/2})$ .

В работе [14] для почти всех частичных булевых операторов с областью определения  $D$  и  $m$  выходами получена нижняя оценка

$\frac{m\sqrt{|D|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |D|)}}$  средней мощности. Отметим, что был применён метод рас-  
слоения, непрерывный аналог которого используется в данной статье.

Позднее в статье [15] было показано, что при незначительных огра-  
ничениях на область определения оператора существует схема, имеющая  
оптимальный порядок мощности, площади и глубины. В частности, для  
всюду определённых операторов с  $n$  входами и  $m$  выходами мощность  
равна  $\Theta\left(\frac{m\sqrt{2^n}}{\min(n, \log_2 m)}\right)$ , а глубина равна  $\Theta(\max(n, \log_2 m))$ .

Для класса монотонных функций также был получен порядок функ-  
ции Шеннона для среднего и максимального потенциала. В частности,  
в работе [16], функция Шеннона для максимального потенциала равна  
 $\Theta\left(\frac{2^{n/2}}{n^{1/4}}\right)$ , а для среднего потенциала равна  $\Theta\left(\frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}\right)$ .

В статье [17] исследована функция Шеннона максимального потенци-  
ала плоских схем, реализующих функции от  $n$  переменных с ограничен-  
ным числом единиц. В частности, было показано, что если количество  
единиц функции ограничено числом  $N$ , при условии  $\log_2 N \asymp n$ , то по-  
рядок функции Шеннона равен  $\Theta(N(n - \log_2 N))$ .

Также Г.В. Калачёвым в работе [16] были доказаны универсальные  
нижние оценки функции Шеннона мощности плоских схем. Кроме того,  
найден порядок роста функции Шеннона мощности схем, реализующих  
монотонные функции.

Позднее в статье [19] был исследован порядок функции Шеннона по-  
тенциала плоских схем, реализующих частичные булевы операторы при  
наличии ограничений на количество различных значений, принимаемых  
оператором. Было показано, что в классе частичных операторов с  $m$  вы-  
ходами, областью определения мощности  $d$  и областью значения мощно-  
сти не более  $r$  как средний, так и максимальный потенциал по порядку  
равны  $\Theta\left(\left(\sqrt{d} + \frac{m\sqrt{r}}{\log_2 r}\right)\sqrt{\log_2 r}\right)$ .

Очень интересный результат получен в работе [20]. Исследуется связь  
между площадью и максимальным потенциалом плоских схем, реализую-  
ющих булевы операторы. Показано, что для произвольного булева опера-  
тора потенциал не меньше, чем  $\sqrt{S}/4\sqrt{2}$ , где  $S$  — площадь минимальной  
схемы, реализующей данный оператор.

Плоские автоматные схемы были недавно рассмотрены А.С. Ворот-  
никовым [25]. В качестве клеточного элемента здесь рассматривается ав-  
томат с не более чем двумя состояниями. А.С. Воротников получил верх-  
нюю оценку переключательной мощности реализации периодической по-  
следовательности автоматной схемой. В работе приводится схема, реали-  
зующая произвольную последовательность длины  $2^n$  с переключатель-  
ной мощностью не более  $\frac{2^{n/2}}{n}$ .

В качестве альтернативной модели СФЭ рассматриваются контактные схемы (КС). Сложностью КС считается количество её контактов. Ю.С. Шуткин [11] ввёл понятие временной сложности КС, являющиеся некоторым аналогом мощности СФЭ. Им было установлено, что функция Шеннона сложности моделирования КС для функций от  $n$  переменных равна  $2n - 1$ .

Данная работа посвящена объёмным схемам [21, 22, 26], которые определяются аналогично плоским схемам, но в трёхмерном пространстве. Под объёмной схемой будем понимать укладку схемы из функциональных элементов в пространстве. Объёмная схема состоит из кубических элементов. Каждый кубический элемент реализует булев оператор, у которого в сумме не более 6 входов и выходов.

В данной работе впервые была получена нижняя оценка потенциала для частичных булевых операторов. А именно показано, что для почти всех булевых операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$  порядок потенциала реализующих их объёмных схем не меньше  $\frac{m \sqrt[3]{d}}{\min^{2/3}(m, \log_2 d)}$ , где  $d = |D|$ . Отметим, что для всюду определенных операторов нижняя оценка совпадает с верхней оценкой, доказанной в работе [22].

Автор выражает особую признательность научному руководителю д.ф.-м.н. профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство. Также автор благодарит Г.В. Калачёва за помощь и внимание к работе.

## 2. Основные понятия и формулировка результатов

*Кубическим элементом* будем называть булев оператор, у которого в сумме не более шести входов и выходов, причем каждому его входу и выходу сопоставлена некоторая метка из множества  $\{l, t, r, b, f, a\}$ , причём метки не повторяются.

Метки будем называть сторонами элемента:

- $l$  — левая сторона;
- $r$  — правая сторона;
- $t$  — верхняя сторона;
- $b$  — нижняя сторона;
- $f$  — передняя сторона;
- $a$  — задняя сторона.

Кубический элемент будем изображать в виде единичного куба в пространстве. При этом входам и выходам элемента сопоставляются грани куба в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами* (*выходами*) элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть *изоляторами*. Входы и выходы элемента будем называть его *контактами*.

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе — *логическим*.

Описывать элемент можно уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки ( $l, t, r, b, f, a$ ). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую часть будут входить только входные метки.

*Сетью из кубических элементов* на множестве  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$  будем называть отображение  $K : M \rightarrow E$ , где  $E$  — множество всех кубических элементов.

Элемент  $K(x, y, z)$  будем называть *элементом схемы  $K$  с координатами  $(x, y, z)$* .

*Левой, правой, верхней, нижней, передней и задней* стороной элемента  $e$  с координатами  $(x, y, z)$  будем называть точки с координатами  $(x - \frac{1}{2}, y, z)$ ,  $(x + \frac{1}{2}, y, z)$ ,  $(x, y, z + \frac{1}{2})$ ,  $(x, y, z - \frac{1}{2})$ ,  $(x, y + \frac{1}{2}, z)$ ,  $(x, y - \frac{1}{2}, z)$  соответственно.

Будем говорить, что сеть  $K$  из кубических элементов корректна, если для любых элементов  $x$  и  $y$  схемы  $K$  верно, что если сторона  $a$  элемента  $x$  совпадает со стороной  $b$  элемента  $y$ , то выполнено одно из условий:

- один из элементов  $x, y$  — изолирующий,
- стороны  $a$  и  $b$  являются изоляторами,
- среди них одна является входом, другая выходом, например,  $a$  — выход, а  $b$  — вход, в таком случае будем говорить, что выход  $a$  *подключен* ко входу  $b$ .

Введём понятие *графа корректной сети из кубических элементов  $K$*  (будем обозначать  $G_K$ ).  $G_K$  — ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины  $a$  в вершину  $b$  ведёт ребро в том и только в том случае, когда существует элемент  $e$ , такой, что  $a$  является его входом,  $b$  — выходом, причём функция, реализуемая на выходе  $b$ , существенно зависит от входа  $a$ .

Объёмной схемой или схемой из кубических элементов на множестве  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$  будем называть корректную сеть из кубических элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество  $M$  будем называть носителем схемы  $K$ .

Длиной схемы  $K$  будем называть длину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $\ell_1(K)$ .

Шириной схемы  $K$  будем называть ширину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $\ell_2(K)$ .

Высотой схемы  $K$  будем называть высоту наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $\ell_3(K)$ .

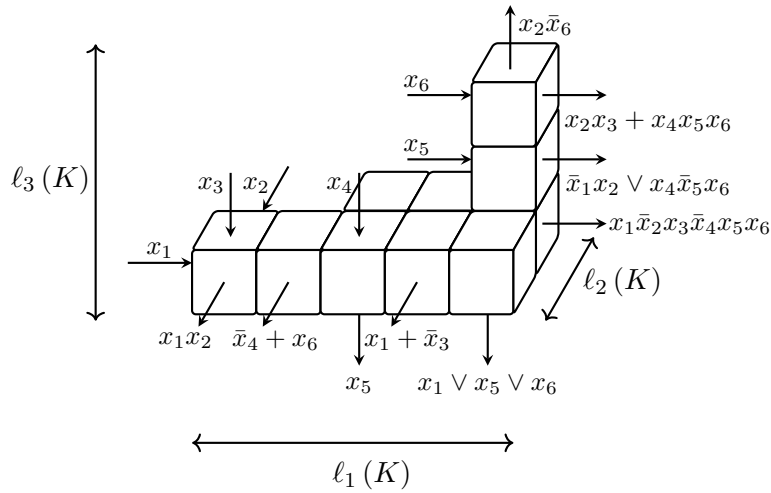


Рис. 1. Изображение объёмной схемы  $K$ .

Длину схемы мы будем смотреть по оси  $Ox$ , ширину — по оси  $Oy$ , высоту — по оси  $Oz$ . На примере, изображенном на рис. 1, у схемы  $K$  имеется 6 входов, 9 выходов, а характеристики равны:  $\ell_1(K) = 5$ ,  $\ell_2(K) = 2$ ,  $\ell_3(K) = 3$ .

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом* (*выходом*) схемы. *Контактами* схемы  $K$  будем называть её входы и выходы, и обозначать их  $(K)$ ,  $(\bar{K})$  соответственно.

*Узлами* схемы  $K$  будем называть вершины графа  $G_K$ .

Если  $M$  — носитель схемы  $K$ , то величину  $|M|$ , равную количеству элементов в множестве  $M$ , будем называть *объёмом* схемы  $K$  и обозначать  $V(K)$ .

Каждой объёмной схеме  $K$  можно сопоставить схему их функциональных элементов ( $K$ ) следующим образом:

- 1) каждой функции  $f_{s,i}$ , которую реализует  $i$ -й выход элемента  $s$  объёмной схемы, сопоставим функциональный элемент  $e_{s,i}$ , реализующий  $f_{s,i}$ ; если на  $i$ -м и  $j$ -м выходе реализуется одна и та же функция, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если  $i$ -й выход элемента  $s_1$  подключен к  $j$ -му входу элемента  $s_2$ , то соединим выход элемента  $e_{s_1,i}$  с  $j$ -ми входами элементов  $e_{s_2,k}$  для всех  $k$ , для которых  $f_{s_2,k}$  существенно зависит от  $j$ -го аргумента.

Будем говорить, что схема  $K$  реализует булев оператор  $F$ , если схема из функциональных элементов ( $K$ ) реализует  $F$ . Через  $(F)$  обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор  $F$ .

Через  $V(F)$  обозначим объём схемы, реализующей оператор  $F$ , и обладающей минимальным объёмом среди всех объёмных схем, реализующих  $F$ .

Будем говорить, что объёмные схемы  $K_1$  и  $K_2$  равны и писать  $K_1 = K_2$ , если существует параллельный перенос пространства, который позволяет совместить схемы  $K_1$  и  $K_2$ , иначе будем говорить, что они различны.

Для каждой схемы  $K$  зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На  $i$ -м узле реализуется некоторая функция  $g_i$  от входных переменных схемы  $K$  (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Всюду далее символ  $:=$  будет обозначать «по определению равно».

Также далее будем считать, что схема  $K$  имеет  $n$  входов,  $m$  выходов и  $l$  узлов. Состоянием схемы  $K$  на входном наборе  $x$  назовём вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если  $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$ , обозначим  $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$ .

Потенциалом схемы  $K$  на входном наборе  $x \in \{0, 1\}^n$  назовём величину  $u_K(x) := |s_K(x)|$ .

Средним потенциалом схемы  $K$  на множестве входных наборов  $D \subseteq \{0, 1\}^n$  назовём величину

$$U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x).$$

Через  $P_2(D, m)$  обозначим множество частичных булевых операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$  с  $m$  выходами, определённых на множестве  $D$ .

Пусть  $f \in P_2(D, m)$ . Тогда

$$U(f) := \min_{K \in (f)} U_D(K).$$

Если множество  $(f)$  пусто, то формально полагаем  $U(f) = \infty$ .

Максимальным потенциалом схемы  $K$  на множестве входных наборов  $D \subseteq \{0, 1\}^n$  назовём величину

$$\hat{U}_D(K) := \max_{x \in D} u_K(x).$$

Пусть  $f \in P_2(D, m)$ . Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in (f)} \hat{U}_D(K).$$

Если  $(f)$  пусто, то формально полагаем  $\hat{U}(f) = \infty$ .

Через  $P_2(n, m)$  обозначим множество всюду определённых булевых операторов  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$  с  $n$  входами и  $m$  выходами.

Введём функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала:

$$U(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U(f).$$

$$\hat{U}(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} \hat{U}(f).$$

**Теорема 1.** Если  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ , то для некоторой константы  $C > 0$  верно

$$U(f) \geq C \frac{m \sqrt[3]{|D|}}{\min^{2/3}(m, \log_2 |D|)}$$

для почти всех операторов  $f \in P_2(D, m)$  при  $n \log_2 n = o(|D|)$ ,  $\log_2 m = o(2^n)$ ,  $|D| \rightarrow \infty$ .

С учётом верхней оценки, доказанной в работе [22], получаем следующие следствия.

**Следствие 1.** Для почти всех  $f \in P_2(n, m)$ , при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\log_2 m = o(2^n)$  верно равенство:

$$U(f) = \Theta \left( \frac{m \cdot 2^{n/3}}{\min^{2/3}(m, n)} \right).$$

**Следствие 2.** Пусть  $n \rightarrow \infty$ ,  $\log_2 m = o(2^n)$ . Тогда верно асимптотическое равенство:

$$U(n, m) \asymp \hat{U}(n, m) = \Theta \left( \frac{m \cdot 2^{n/3}}{\min^{2/3}(m, n)} \right).$$



## 3. Доказательство основной теоремы

### 3.1. Метод расслоения

Для доказательства основной теоремы воспользуемся некоторыми определениями, введёнными ранее в работах Г.В. Калачёва [13], [14].

Пусть  $M$  — подсхема схемы  $K$ . Входы и выходы схемы  $M$ , не являющиеся входами и выходами схемы  $K$ , назовём *граничными контактами* подсхемы  $M$  относительно схемы  $K$ . Множество граничных контактов обозначим  $(M|K)$ .

Через  $(M|K)$  обозначим множество входов  $M$ , которые лежат в разрезе  $(M|K)$  (такие входы будем называть *граничными*), то есть

$$(M|K) = (M) \cap (M|K) = (M) \setminus (K).$$

Через  $(MK)$  обозначим множество выходов  $M$ , которые являются выходами  $K$ , то есть

$$(MK) = (M) \cap (K).$$

Идея метода расслоения состоит в том, чтобы считать потенциал схемы по слоям. В работах [13], [14] выделяется множество подсхем такое, чтобы их контакты, не являющиеся контактами всей схемы, не пересекались, а оценивается снизу сумма потенциалов на контактах каждой подсхемы. В доказательстве нижней оценки для частичных операторов такой подход приводит к существенным техническим трудностям, связанным с тем, что при построении расслоения характеристики подсхем изменяются дискретно, что сильно осложняет точные оценки и ведёт к необходимости некоторых огрублений. В частности, в работе [13] из-за этого возникает дополнительный случай  $\log t \succeq \sqrt{|D|}$ , рассмотрение которого занимает несколько страниц.

В данной работе предлагается модифицированный подход, позволяющий строить «непрерывное» расслоение. Он основан на геометрическом представлении схемы в пространстве таким образом, что элементы расположены в узлах целочисленной решётки, а провода — отрезки, соединяющие соседние вершины. При этом если провод активен, то энергия выделяется равномерно по всей его длине. Вместо того чтобы рассматривать расслоение, в котором границей является множество проводов (контактов подсхемы), мы будем рассматривать пересечение бесконечного семейства слоёв с проводами схемы. Вместо суммирования мы будем интегрировать по элементам расслоения таким образом, чтобы потенциал каждого провода получался как интеграл по множеству слоёв, пересекающих этот провод.

Такой подход требует некоторого количества дополнительных подготовительных определений, но зато доказательство основного результата

будет более прозрачным и не потребует рассмотрения дополнительных случаев ограничений на параметры  $m$ ,  $n$  и  $|D|$ . Итак, перейдём к формальным определениям.

*Расслоением* назовём такое произвольное множество  $\Omega$  подмножеств  $\mathbb{R}^3$ , что границы различных элементов  $\Omega$  не пересекаются. Границы элементов расслоения назовём *слоями*.

Если зафиксируем некоторое ребро  $w$  целочисленной решётки в  $\mathbb{R}^3$ , то для любого элемента расслоения  $R \in \Omega$  можно определить функцию

$$I_w(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } \partial R \cap w \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \partial R \cap w = \emptyset. \end{cases} \quad (1)$$

*Проводом* схемы  $K$  будем называть отрезок, соединяющий центры соседних элементов, если его середина — узел схемы  $K$ . Множество проводов схемы  $K$  обозначим через  $W(K)$ . Все провода являются рёбрами целочисленной решётки  $\mathbb{Z}^3$ . Далее нам будет удобно отождествлять узлы и соответствующие провода. В частности, разрез  $(M|K)$  мы также будем понимать, как множество проводов в разрезе.

Для объёмной схемы  $K$  и множества  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  через  $K(R)$  обозначим подсхему, состоящую из тех элементов схемы  $K$ , центры которых попали в  $R$ . Через  $U_D(\alpha)$  обозначим средний потенциал в узле  $\alpha$  схемы  $K$ :

$$U_D(\alpha) = \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} g_\alpha(x).$$

Если  $X$  — множество узлов схемы  $K$ , то определим  $U_D(X)$ :

$$U_D(X) = \sum_{\alpha \in X} U_D(\alpha).$$

В частности, если  $M$  — подсхема схемы  $K$ , то  $U_D(M|K)$  — средний потенциал на граничных контактах подсхемы  $M$ , а  $U_D((M|K))$  — средний потенциал на граничных входах подсхемы  $M$ .

**Лемма 1.** *Рассмотрим на множестве слоёв  $\Omega$  такую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A}$ , что функции  $I_w(R)$  измеримы для каждого  $w$ . Пусть на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$  введена такая мера  $\mu$ , что для любого ребра  $w$  целочисленной решётки  $\mathbb{Z}^3$  верно условие:*

$$\int_{\Omega} I_w(R) d\mu(R) \leq C, \quad (2)$$

где  $C > 0$  — некоторая константа. Тогда функция  $U_D(K(R)|K)$  также измерима и верно следующее неравенство:

$$U_D(K) \geq \frac{1}{C} \int_{\Omega} U_D(K(R)|K) d\mu(R). \quad (3)$$

*Доказательство.* Заметим, что разрез  $(K(R)|K)$  состоит в точности из тех проводов схемы  $K$ , которые пересекаются со слоем  $\partial R$ . Поэтому

$$U_D(K(R)|K) = \sum_{\alpha \in W(K)} I_\alpha(R) U_D(\alpha, K).$$

Интегрируя по множеству слоёв и используя (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int_{\Omega} U_D(K(R)|K) d\mu(R) &= \sum_{\alpha \in W(K)} U_D(\alpha, K) \frac{1}{C} \int_{\Omega} I_\alpha(R) d\mu(R) \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in W(K)} U_D(\alpha, K) = U_D(K). \end{aligned}$$

□

### 3.2. Идея и схема доказательства

Нижнюю оценку будем доказывать следующим образом. Пусть есть класс  $B$  операторов, причём для каждого оператора  $f \in B$  и любой схемы  $K$ , реализующей оператор  $f$  есть нижние оценки для потенциала на границе любой подсхемы, удовлетворяющей определённым ограничениям. Тогда будем строить непрерывное расслоение  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(K)$  такое, что для всех  $R \in \mathfrak{R}$  подсхемы  $K(R)$  удовлетворяют этим ограничениям, и затем интегрировать оценку потенциала на границе  $(K(R)|K)$  по слоям, чтобы получить оценку для всей схемы  $K$  по формуле (3).

На рис. 2 изображена схема доказательства. Леммы 1–2 посвящены методу расслоения. В лемме 1 получено общее неравенство на потенциал с использованием расслоения, удовлетворяющего некоторым условиям. В лемме 2 получено свойство конкретного расслоения  $\mathfrak{R}$ , а в лемме 3 проверено, что расслоение  $\mathfrak{R}$  удовлетворяет условию леммы 1.

Геометрическим оценкам посвящены леммы 4–12. Вводим вспомогательную величину  $u_I(t)$ , через которую будем оценивать снизу потенциал схемы  $K$ . Для этого нам потребуется оценка из леммы 10:  $u_I(t) \geq \frac{1}{32} \frac{s_I^2(t)}{v_I(t)}$ . Но напрямую получить искомую оценку не получается, поэтому вводим величину  $G_I(t)$ , зависящую от длины остовного дерева некоторого взвешенного графа. Оценив  $G_I(t)$  в леммах 5 и 9, получаем результат леммы 10.

Основное доказательство состоит из лемм 13–18, леммы 19 и теоремы 1. В леммах 13–18 рассматриваются классы операторов  $L_0(D, m)$  и  $L_1(D, m)$ , такие, что для любого оператора  $B$  из  $L_0(D, m)$  или  $L_1(D, m)$  существует реализующая их объёмная схема  $K$  и её подсхема  $K_0$ , что на границе подсхемы  $K_0$  имеются ограничения на потенциал. Показывается, что  $|L_0(D, m)| = o(2^{md})$  и  $|L_1(D, m)| = o(2^{md})$ . Таким образом,

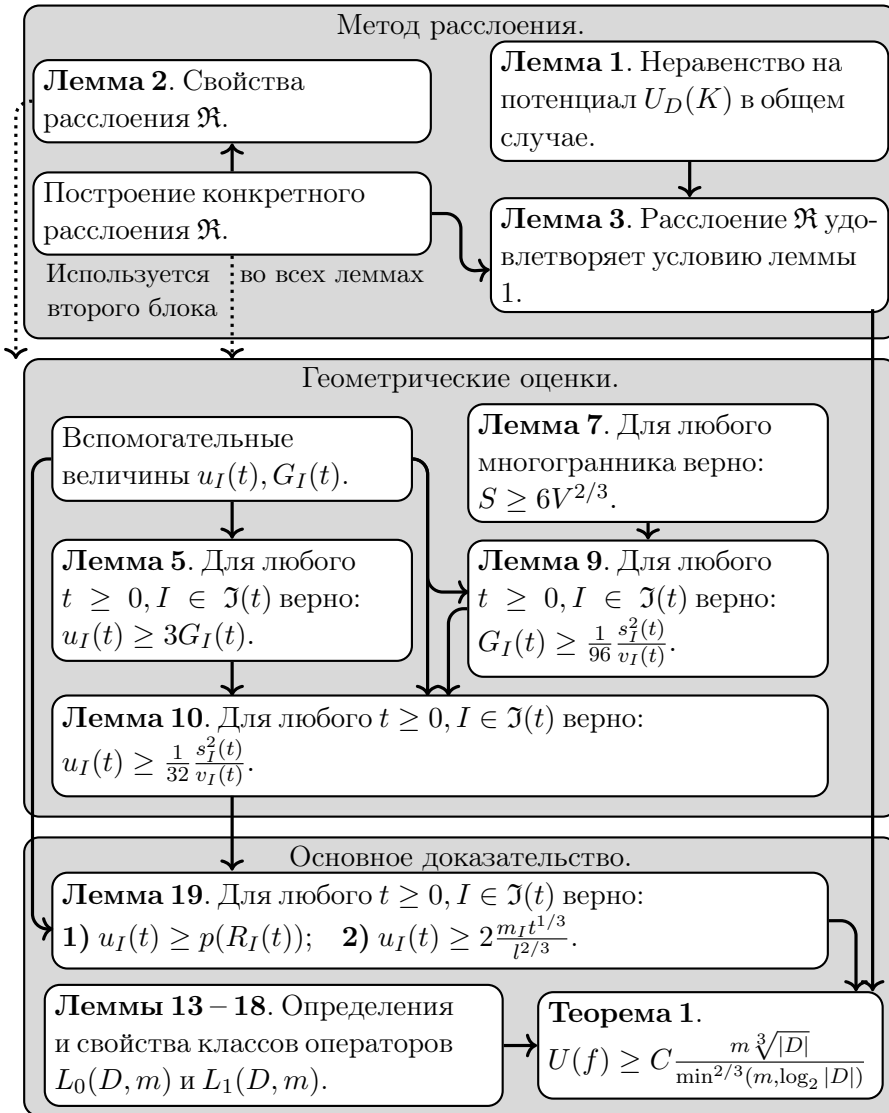


Рис. 2. Схема доказательства нижней оценки.

для почти всех операторов на любом разрезе имеются нижние оценки на потенциал, которые определенным образом суммируются (интегрируются). В лемме 19 и теореме 1 собираются все предыдущие оценки и получается итоговый результат.

### 3.3. Построение непрерывного расслоения $\mathfrak{X}$

Рассмотрим произвольную объёмную схему  $K$ , имеющую  $n$  входов и  $m$  выходов. Далее в разделах 3.3 и 3.4 будем считать схему  $K$  фиксированной. Пусть в схеме имеется  $s$  элементов, к которым подключены выходы схемы, занумеруем их от 1 до  $s$ . Центры этих элементов обозначим через  $c_1, \dots, c_s$ . Для удобства для любого  $q \in \mathbb{N}$  положим  $[q] = \{1, 2, \dots, q\}$ . Через  $m_i$  обозначим число выходов элемента с центром  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Для произвольного  $I \subseteq 2^{[s]}$  положим  $m_I = \sum_{i \in I} m_i$ .

Формальное построение расслоения немного громоздкое, но оно имеет достаточно естественную физическую интерпретацию. Опишем неформально эту интерпретацию. Допустим, что точка  $c_i$  является источником жидкости с интенсивностью  $m_i$ . В момент  $t = 0$  в пространстве нет жидкости. Начиная с момента  $t = 0$  в каждую точку  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , начинает подаваться жидкость со скоростью  $m_i$ , при этом каждая точка изначально окружена абсолютно эластичной плёнкой, ограничивающей жидкость. При подаче жидкости плёнка расширяется равномерно по всей поверхности, то есть скорость её расширения перпендикулярно поверхности одинаковая во всех точках поверхности. В момент, когда две плёнки касаются друг друга, они сливаются и начинают образовывать одну единую компоненту связности, которая дальше расширяется равномерно по всей поверхности объединения. Важным свойством этого процесса является то, что по построению в момент времени  $t$  объём компоненты связности  $R_I(t)$ , содержащей внутри источники  $c_i$ ,  $i \in I$ , равен в точности  $m_I \cdot t$ . Это свойство является ключевым для доказательства основной теоремы.

Поскольку компоненты, расширяясь, иногда объединяются, в конечном итоге они сливаются в одну компоненту, поэтому множество элементов расслоения можно представлять в виде дерева, изображённого ниже на рисунке 3. С целью выполнить условие (2) леммы 1, меру на расслоении вводим таким образом, чтобы её плотность в каждой точке была пропорциональна скорости расширения компоненты связности расслоения, соответствующей этой точке, перпендикулярно поверхности.

На протяжении всего доказательства будем использовать метрику Чебышева  $\ell_\infty$ , где расстояние определяется как  $\|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty = \max_{i=1,2,3} |x_i - y_i|$  в  $\mathbb{R}^3$ . Через  $B(x, r)$  будем обозначать шар с центром  $x \in \mathbb{R}^3$  и радиусом  $r \geq 0$ , то есть  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - y\|_\infty \leq r\}$ .

Для множеств  $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^3$  определим оператор сложения множеств  $A_1 + A_2 = \{x + y \mid x \in A_1, y \in A_2\}$ . Введём  $A + r := A + B(\mathbf{0}, r)$ ,  $A \in \mathbb{R}^3, r \in \mathbb{R}^+$ .

По индукции будем строить множества  $\mathfrak{I}(t) \subseteq 2^{[s]}$ ,  $R_I(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $t \geq 0$ ,  $I \in \mathfrak{I}(t)$ , последовательно определяя возрастающую последовательность  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{q-1} < t_q = \infty$ , на  $i$ -м шаге определяя число  $t_{i+1} > t_i$  и упомянутые множества при  $t \in [t_i, t_{i+1})$ .

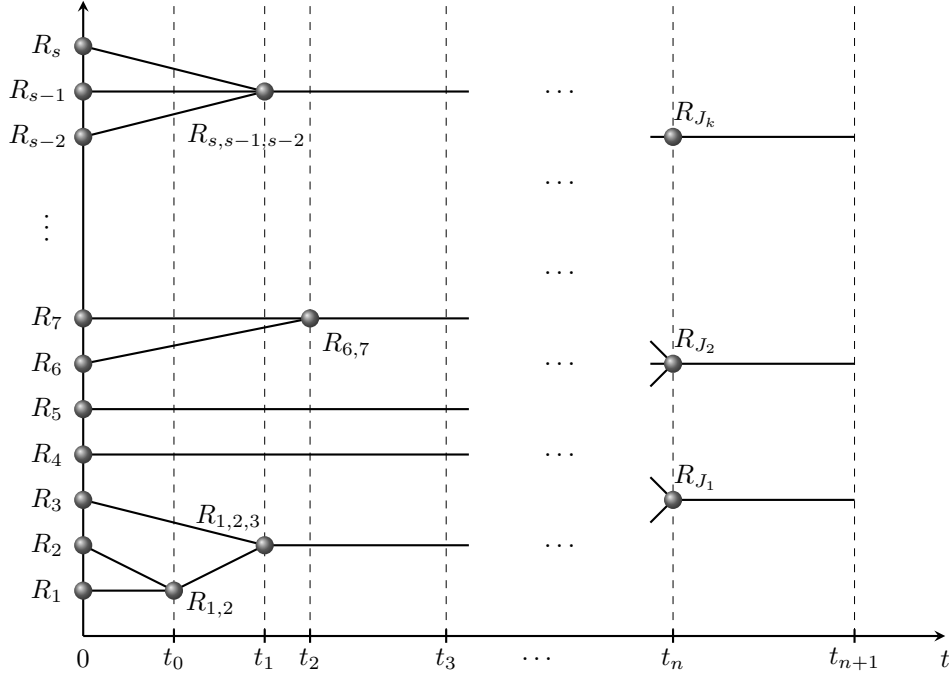


Рис. 3. Построение множеств  $R_I(t)$ .

**База индукции.** Положим

$$t_0 = 0; \quad \mathfrak{I}(0) = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{s\}\}; \quad R_{\{i\}}(0) = \{c_i\} \text{ при } i \in [s].$$

**Переход индукции.** Пусть  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_i$  образуют строго возрастающую последовательность, и для всех  $t \in [0, t_i]$  определены множества  $\mathfrak{I}(t) \subseteq 2^{[s]}$ . Пусть также для всех  $j < i$ ,  $t \geq t_j$ ,  $I \in \mathfrak{I}(t_j)$  определено множество  $R_I(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

На шаге индукции нам необходимо определить момент  $t_{i+1} > t_i$ , множества  $\mathfrak{I}(t)$  при  $t \in (t_i, t_{i+1})$ , а также множества  $R_I(t)$  для всех  $I \in \mathfrak{I}(t_i) \setminus \mathfrak{I}(t_{i-1})$ ,  $t \geq t_i$ . В случае, если  $t_{i+1} < \infty$ , требуется также определить  $\mathfrak{I}(t_{i+1})$ .

- Рассмотрим  $I \in \mathfrak{I}(t_i)$ . Если  $i > 0$  и  $I \in \mathfrak{I}(t_{i-1})$ , то  $R_I(t)$  при  $t \geq t_i > t_{i-1}$  определено по предположению индукции. Иначе  $R_I(t_i)$

было получено операцией объединения в момент  $t_i$ , либо  $t_i = 0$ . Поскольку для любого  $I \in \mathfrak{I}(t_i)$  выполнено  $V(R_I(t_i)) = m_i t_i$ , и функция  $V(R_I(t_i) + r)$  строго возрастает по  $r$ , то для  $t \geq t_i$ , существует единственное  $r$  такое, что  $V(R_I(t_i) + r) = m_i t$ ; обозначим его через  $r_I(t)$ . Определим  $R_I(t) = R_I(t_i) + r_I(t)$  при  $t \geq t_i$ . Отметим, что  $V(R_I(t)) = m_i t$  выполнено по определению  $r_I(t)$ .

Если  $|\mathfrak{I}(t_i)| = 1$ , то положим  $t_{i+1} = \infty$ . Иначе определим

$$t_{i+1} = \min\{t \geq t_i \mid \exists I, J \in \mathfrak{I}(t_i) : I \neq J \text{ и } R_I(t) \cap R_J(t) \neq \emptyset\}.$$

Для  $t \in (t_i, t_{i+1})$  положим  $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t_i)$ .

- Если  $t_{i+1} = \infty$ , то завершим построение. Иначе, пусть  $t = t_{i+1}$ .

Заметим, что существуют такие  $q \geq 1$  групп индексов  $I_1^j, I_2^j, \dots, I_{k_j}^j \in \mathfrak{I}(t_i)$ ,  $j \in [q]$ , что множества  $R_{I_1^j}(t), R_{I_2^j}(t), \dots, R_{I_{k_j}^j}(t)$  попарно не имеют общих точек при  $t < t_{i+1}$ , а при  $t = t_{i+1}$  образуют одну компоненту связности. Положим

$$J^j = I_1^j \cup I_2^j \cup \dots \cup I_{k_j}^j, \quad R_{J^j}(t) = R_{I_1^j}(t) \cup \dots \cup R_{I_{k_j}^j}(t), \quad j \in [q]$$

В таком случае будем говорить, что множество  $R_{J^j}(t)$  получено из множеств  $R_{I_1^j}(t), \dots, R_{I_{k_j}^j}(t)$  операцией объединения. Также определим

$$\mathfrak{I}(t_{i+1}) := (\mathfrak{I}(t_i) \setminus \bigcup_{j=1}^q \{I_1^j, I_2^j, \dots, I_{k_j}^j\}) \cup \{J^1, \dots, J^q\}.$$

В качестве расслоения будем рассматривать  $\mathfrak{R} = \{R_I(t) \mid t \geq 0, I \in \mathfrak{I}(t)\}$ .

В доказательстве будем также использовать несколько дополнительных обозначений. Нетрудно видеть, что множество  $R_I(t)$  является многогранником, поэтому его объём и площадь поверхности определены. Через  $v_I(t)$  будем обозначать объём множества  $R_I(t)$ , а через  $s_I(t)$  — площадь поверхности  $R_I(t)$ .

Обозначим  $\mathfrak{I} = \bigcup_{t \geq 0} \mathfrak{I}(t)$ . Для фиксированного  $I \in \mathfrak{I}$  введём числа

$$a_I = \min\{t \geq 0 \mid I \in \mathfrak{I}(t)\}, \quad b_I = \sup\{t \geq 0 \mid I \in \mathfrak{I}(t)\}$$

(если  $I = \{1, \dots, s\}$ , то  $b_I = \infty$ , иначе  $b_I$  конечно). Заметим, что  $I \in \mathfrak{I}(t)$  тогда и только тогда, когда  $t \in [a_I, b_I)$ .

Нам также понадобится объединение множеств  $R(t) = \bigcup_{I \in \mathfrak{I}(t)} R_I(t)$ .

Введём подсхемы  $M_I(t) = K(R_I(t))$ , и  $M(t) = K(R(t))$ .

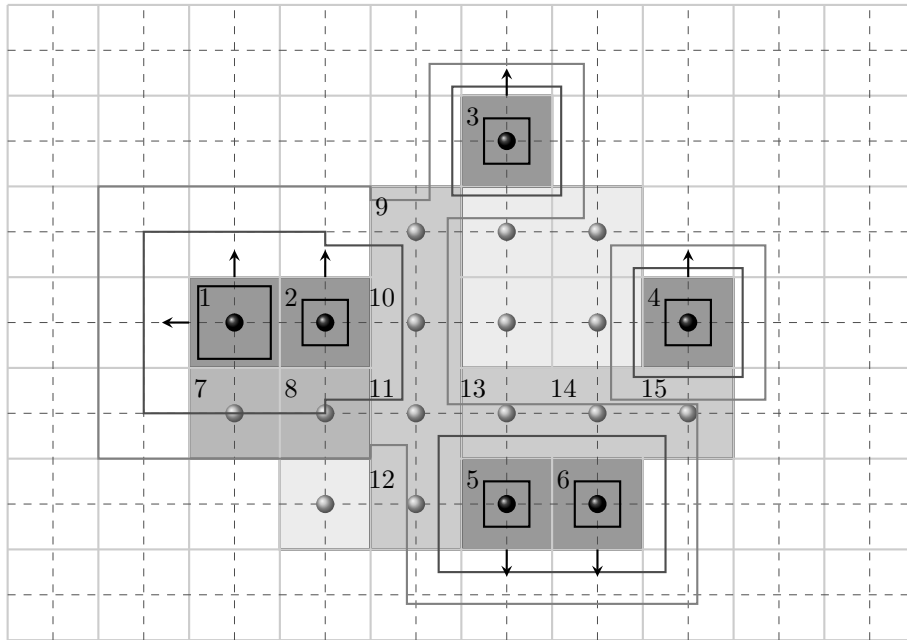


Рис. 4. Построение  $M(t)$ .

Опишем процесс построения подсхемы  $M(t)$  на примере плоской схемы (на рис. 4 центры обозначены точками, выходы — стрелками). Сплошные серые линии — это границы элементов, пересечения пунктирных линий — это центры элементов. Отрезки пунктирных линий, соединяющие центры соседних элементов, — это провода схемы. Сплошными линиями обозначены границы некоторых множеств 1–6 из  $R(t_0)$  при некотором  $t_0 > 0$ ; элементы 1–6 принадлежат подсхеме  $M(t_0)$ . Более светлыми сплошными линиями обозначены границы некоторых множеств 7–8 из  $R(t_1)$  при некотором  $t_1 > t_0$ ; элементы 7–8 принадлежат подсхеме  $M(t_1)$ , но не входят в подсхему  $M(t_0)$ , то есть те элементы, которые добавляются в  $M(t)$  при  $t = t_1$  по сравнению с  $t = t_0$ . Аналогично, самыми светлыми сплошными линиями обозначены границы некоторых множеств 9–15 из  $R(t_2)$  при некотором  $t_2 > t_1$ ; элементы 9–15 принадлежат подсхеме  $M(t_2)$ , но не входят в подсхему  $M(t_1)$ .

Пусть  $A \in \mathbb{R}^3$ . Через  $\ell_1(A), \ell_2(A), \ell_3(A)$  обозначим соответственно длину, ширину и высоту стягивающего прямоугольного параллелепипеда для множества  $A$ ,

$$p(A) := \sum_{i=1}^3 \ell_i(A).$$



Построим меру  $\rho$  для расслоения  $\mathfrak{R}$ , которое можно представить в виде дерева (см. рис. 3). Рёбра дерева индексируются элементами множества  $\mathfrak{I}$ . Положим  $\mathfrak{R}_I = \{R_I(t) \mid t \in [a_I, b_I]\}$ , это множество соответствует ребру в дереве  $\mathfrak{R}$  с индексом  $I$ . Легко видеть, что  $\mathfrak{R} = \bigsqcup_{I \in \mathfrak{I}} \mathfrak{R}_I$ . Поскольку множество  $\mathfrak{R}_I$  является образом промежутка  $[a_I, b_I]$ , на нём определена мера Лебега-Стилтьеса  $\rho_I$  с функцией распределения  $p_I(t) = p(R_I(t))$ ,  $t \in [a_I, b_I]$ . В частности,

$$\rho_I(\{R_I(t) \mid t \in [x, y]\}) = p(R_I(y)) - p(R_I(x)), \quad a_I \leq x < y \leq b_I.$$

Поскольку функция  $p_I$  строго возрастает, то мера  $\rho_I$  положительная. Кроме того, поскольку  $p_I$  непрерывна, то мера любого конечного подмножества  $\mathfrak{R}_I$  равна нулю. Меру  $\rho$  на множестве  $\mathfrak{R}$  введём так, чтобы она совпадала с  $\rho_I$  на подмножестве  $\mathfrak{R}_I$  для всех  $I \in \mathfrak{I}$ . А именно, если  $X \subseteq \mathfrak{R}$  и для всех  $I \in \mathfrak{I}$  множество  $X \cap \mathfrak{R}_I$  измеримо относительно меры  $\rho_I$ , то  $X$  измеримо относительно  $\rho$  и

$$\rho(X) = \sum_{I \in \mathfrak{I}} \rho_I(X \cap \mathfrak{R}_I).$$

Сформулируем в виде леммы некоторые дополнительные свойства построенного расслоения  $\mathfrak{R}$ . Пусть  $B(x, r)$  — шар с центром  $x \in \mathbb{R}^3$  и радиусом  $r \geq 0$ , то есть  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - y\|_\infty \leq r\}$ .

**Лемма 2.** *Для любого  $t > 0$  выполнено:*

- 1)  $[s] = \bigsqcup_{I \in \mathfrak{I}(t)} I$ , т.е.  $\mathfrak{I}(t)$  задаёт некоторое разбиение множества  $[s]$ .
- 2) Существуют числа  $r_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, s$  такие, что для всех  $I \in \mathfrak{I}(t)$  множество  $R_I(t)$  является объединением шаров

$$R_I(t) = \bigcup_{i \in I} B(c_i, r_i(t)).$$

- 3) Шары  $B(c_i, r_i(t))$  для различных  $i$  не вложены друг в друга, т.е.

$$\|c_i - c_j\|_\infty + r_i(t) - r_j(t) > 0 \quad \text{при } i, j \in [s], i \neq j.$$

Кроме того, если  $a_I \leq x \leq y \leq b_I$ , то для всех  $i \in I$  выполнено

$$p(R_I(y)) - p(R_I(x)) = 6(r_i(y) - r_i(x)).$$

*Доказательство.* Упорядочим элементы множества  $\{a_I \mid \exists I \in \mathfrak{I}\}$  по возрастанию и обозначим их  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_q$ . Докажем свойства 1)–3) индукцией по  $i$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1})$ .

**База индукции.** Пусть  $t \in [0, t_1)$ .

- 1) Так как  $\mathfrak{I}(t) = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{s\}\}$ , то элементы  $\mathfrak{I}(t)$  не пересекаются, и

$$\bigsqcup_{I \in \mathfrak{I}(t)} I = \bigsqcup_{i=1}^s \{i\} = [s].$$

- 2) Каждое множество  $R_{\{i\}}(t) = B(c_i, r_{\{i\}}(t)), i \in [s]$ , положим в этом случае  $r_i(t) = r_{\{i\}}(t)$ .

- 3) Заметим, что условие  $\|c_i - c_j\|_\infty + r_i(t) - r_j(t) > 0$  означает, что расстояние между центрами шаров больше разности радиусов  $r_j(t) - r_i(t)$ , что эквивалентно тому, что  $B(c_i, r_i(t)) \not\subseteq B(c_j, r_j(t))$ .

В данном случае, так как все шары  $B(c_i, r_i(t))$  не пересекаются, то они не вложены друг в друга.

**Переход индукции.** Пусть  $t \in [t_i, t_{i+1})$ . Заметим, что по построению тогда существует  $q \geq 1$  таких групп индексов  $I_1^j, I_2^j, \dots, I_{k_j}^j \in \mathfrak{I}(t_i), j \in [q]$ , что множество  $R_{I_1^j \cup I_2^j \cup \dots \cup I_{k_j}^j}(t_i)$  получено из множеств  $R_{I_1^j}(t_i), R_{I_2^j}(t_i), \dots, R_{I_{k_j}^j}(t_i)$  операцией объединения. Обозначим  $J^j = I_1^j \cup I_2^j \cup \dots \cup I_{k_j}^j, j \in [q]$ .

- 1) Тогда  $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t_{i-1}) \setminus \bigcup_{j=1}^q \{I_1^j, I_2^j, \dots, I_{k_j}^j\} \cup \{J^1, \dots, J^q\}$ . По предположению индукции верно

$$\bigsqcup_{I \in \mathfrak{I}(t_{i-1})} I = [s].$$

Учитывая определение  $J^j$ , получаем

$$\bigsqcup_{I \in \mathfrak{I}(t)} I = \bigsqcup_{I \in \mathfrak{I}(t_{i-1})} I \setminus \left( \bigcup_{j=1}^q \bigcup_{l=1}^{k_j} I_l^j \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^q J^j \right) = [s].$$

Покажем, что  $\forall A, B \in \mathfrak{I}(t_i)$  верно  $A \cap B = \emptyset$ . Если  $A \neq J^j, B \neq J^j$ , то  $A, B \in \mathfrak{I}(t_{i-1})$ , значит по предположению индукции верно  $A \cap B = \emptyset$ .

Пусть без ограничения общности  $B = J^j$ . Тогда по предположению индукции  $A \cap I_z^j = \emptyset, z \in [k_j]$ , а значит  $A \cap J^j = \emptyset$ .

- 2) Для всех  $j \in [q]$  верно

$$R_{J^j}(t_i) = \bigcup_{z=1}^{k_j} R_{I_z^j}(t_i) = \bigcup_{z=1}^{k_j} \bigcup_{q \in I_z^j} B(c_q, r_q(t_i)) = \bigcup_{z \in J^j} B(c_z, r_z(t_i)).$$

При  $t \in (t_i, t_{i+1})$  получаем

$$R_{Jj}(t) = R_{Jj}(t_i) + r_{Jj}(t) = \bigcup_{z \in J^j} B(c_z, r_z(t_i) + r_{Jj}(t)), \quad j \in [q].$$

Если  $I \in \mathfrak{J}(t)$ ,  $a_I \neq t_i$ , то выполняется равенство

$$R_I(t) = R_I(a_I) + r_I(t) = \bigcup_{j \in I} B(c_j, r_j(a_I) + r_I(t)) \quad \text{при } t \in [a_I, b_I].$$

3) Если  $i \in I, j \in J, I \neq J$ , то шары  $B(c_i, r_i(t))$  и  $B(c_j, r_j(t))$  не пересекаются, а значит и не вложены друг в друга.

Рассмотрим случай  $i, j \in I$ . Так как  $R_I(t) = \bigcup_{q \in I} B(c_q, r_q(a_I) + r_I(t))$

при  $t \in [a_I, b_I]$ , то

$$r_i(t) = r_i(a_I) + r_I(t), \quad r_j(t) = r_j(a_I) + r_I(t), \quad t \in [a_I, b_I].$$

Так как по предположению индукции верно

$$\|c_i - c_j\|_\infty + r_i(a_I) - r_j(a_I) > 0,$$

То имеем при  $t \in [a_I, b_I]$

$$\|c_i - c_j\|_\infty + r_i(t) - r_j(t) = \|c_i - c_j\|_\infty + r_i(a_I) + r_I(t) - r_j(a_I) - r_I(t) > 0.$$

Докажем последний пункт леммы 2. По определению  $R_I$  и  $r_i$  выполнено

$$\begin{aligned} R_I(x) &= R_I(a_I) + r_I(x), & R_I(y) &= R_I(a_I) + r_I(y), \\ r_i(x) &= r_i(a_I) + r_I(x), & r_i(y) &= r_j(a_I) + r_I(y). \end{aligned}$$

Поскольку при расширении множества  $A$  на  $r$ , его проекция на каждое направление увеличивается на  $2r$ , то

$$\ell_q(A + r) = \ell_q(A) + 2r, \quad q = 1, 2, 3.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} p(R_I(y)) - p(R_I(x)) &= \sum_{q=1}^3 (\ell_q(R_I(a_I) + r_I(y)) - \ell_q(R_I(a_I) + r_I(x))) = \\ &= 6(r_I(y) - r_I(x)) = 6(r_i(y) - r_i(x)). \end{aligned}$$

□

С учётом последнего пункта леммы 2, для  $x, y \in [a_I, b_I]$  можно определить величину  $\Delta r_I(x, y)$  такую, что

$$r_i(y) - r_i(x) = \Delta r_I(x, y) \text{ для всех } i \in I. \quad (4)$$

Покажем, что мера  $\rho$  удовлетворяет неравенству (2), а именно верно следующее утверждение:

**Лемма 3.** Пусть  $\mathfrak{R}$  — расслоение на множестве  $\mathbb{R}^3$ . Тогда для любого ребра  $w$  целочисленной решетки  $\mathbb{Z}^3$  верно неравенство:

$$\int_{\mathfrak{R}} I_w(R) d\rho(R) \leq 6. \quad (5)$$

*Доказательство.* Зафиксируем ребро  $w$ . Пусть  $A \in \mathbb{R}^3$ . Обозначим  $\lambda(A)$  длину  $w \cap A$ . Тогда на множестве  $\mathfrak{R}_I$  можно определить меру  $\lambda_I$  с функцией распределения  $\lambda(R_I(t))$ .

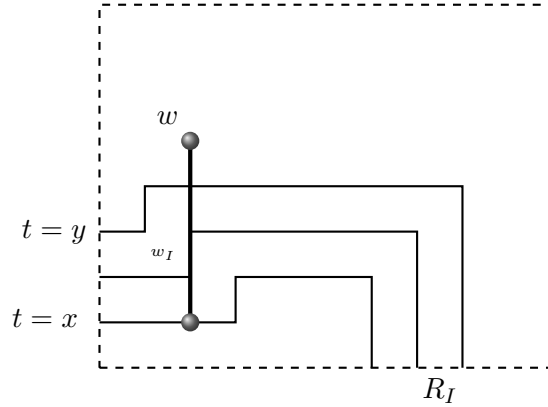


Рис. 5. Свойство расслоения  $\mathfrak{R}$ .

Докажем, что если  $a_I \leq x < y < b_I$ ,  $I_w(R_I(x)) = I_w(R_I(y)) = 1$  (см. рис. 5), то верно

$$p(R_I(y)) - p(R_I(x)) \leq 6 (\lambda(R_I(y)) - \lambda(R_I(x))). \quad (6)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} p(R_I(y)) - p(R_I(x)) &= \sum_{i=1}^3 (\ell_i(R_I(y)) - \ell_i(R_I(x))) = 6(r_I(y) - r_I(x)) \leq \\ &\leq 6 (\lambda(R_I(y)) - \lambda(R_I(x))). \end{aligned}$$

Обозначим  $w_I$  ту часть отрезка  $w$ , что пересекается со слоем  $\partial R_I(t)$ ,  $t \in [a_I, b_I]$ . Отметим, что при  $I \neq J \in \mathfrak{I}$ , верно  $w_I \cap w_J = \emptyset$ , так как слои в расслоении  $\mathfrak{R}$  не пересекаются. В таком случае, в силу неравенства (6) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}_I} I_w(R) d\rho(R) &= \int_{a_I}^{b_I} I_w(R_I(t)) dp(R_I(t)) \leq \\ &\leq 6 \int_{a_I}^{b_I} I_w(R_I(t)) d\lambda(R_I(t)) = 6|w_I|. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\int_{\mathfrak{R}} I_w(R) d\rho(R) = \sum_{I \in \mathfrak{I}} \int_{R_I} I_w(R) d\rho(R) \leq \sum_{I \in \mathfrak{I}} 6|w_I| \leq 6|w| = 6.$$

□

Таким образом, по лемме 1 для данной меры  $p$  и данного расслоения  $\mathfrak{R}$  имеет место неравенство, полученное из неравенства (3):

$$U_D(K) \geq \frac{1}{6} \int_{\mathfrak{R}} U_D(M|K) d\rho(R). \quad (7)$$

### 3.4. Геометрические оценки

Для множества  $I \subseteq \{1, \dots, s\}$  рассмотрим полный взвешенный граф с вершинами в точках  $c_i$ ,  $i \in I$ , где вес ребра  $\{c_i, c_j\}$  равен  $w(\{c_i, c_j\}) = \|c_i - c_j\|_\infty$ , то есть расстоянию между точками  $c_i$  и  $c_j$  (напомним, что  $c_i$  — центр  $i$ -го выходного элемента схемы). Пусть  $T$  — некоторое остовное дерево этого графа с множеством рёбер  $E(T)$ . Через  $w(T)$  обозначим сумму весов его рёбер. Введём также величину  $G_I^T(t)$ :

$$G_I^T(t) = w(T) + \sum_{i \in I} (2 - \deg_T(c_i)) r_i(t),$$

где  $\deg_T(c)$  — степень вершины  $c$  в дереве  $T$ . В основном нас будет интересовать величина  $G_I(t) = \min_T G_I^T(t)$ , где минимум берётся по всем остовным деревьям  $T$ . Из (4) для всех  $I \in \mathfrak{I}(t)$  следует, что

$$G_I^T(t) = G_I^T(a_I) + \Delta r_I(a_I, t) \sum_{i \in I} (2 - \deg_T(c_i)) = G_I^T(a_I) + 2\Delta r_I(a_I, t),$$

поскольку сумма степеней вершин в дереве с  $|I|$  вершинами равна  $2|I| - 2$ . Значит для фиксированного  $I \in \mathfrak{I}$  можно выбрать дерево  $T_I$ , на котором будет достигаться минимум при всех  $t \in [a_I, b_I]$ , причём

$$G_I(t) = G_I(a_I) + 2\Delta r_I(a_I, t) \quad \text{при } t \in [a_I, b_I]. \quad (8)$$

Для каждого  $I \in \mathfrak{I}$  и  $t \in [a_I, b_I]$  определим величину  $u_I(t)$ :

$$u_I(t) = \sum_{J \in \mathfrak{I}: J \subseteq I} \int_{a_J}^{\min(b_J, t)} \max\left(\frac{m_J}{l}, 1\right) d(p(R_J(t))). \quad (9)$$

Нам понадобятся следующие свойства величины  $u_I(t)$ , следующие непосредственно из определений.

**Лемма 4.** Для любого  $t \geq 0$  и  $I \in \mathfrak{I}(t)$  верно:

- 1)  $u_I(0) = 0$  для всех  $I \in \mathfrak{I}(0)$ .
- 2) Если  $t = a_I > 0$ , то множество  $R_I(t)$  получено операцией объединения из некоторых множеств  $R_{J_1}(t), R_{J_2}(t), \dots, R_{J_k}(t)$  в момент времени  $t$ , в этом случае  $u_I(t) = u_{J_1}(t) + u_{J_2}(t) + \dots + u_{J_k}(t)$ .
- 3) Если  $t \in [a_I, b_I]$ , то

$$u_I(t) = u_I(a_I) + \int_{a_I}^t \max\left(\frac{m_I}{l}, 1\right) d(p(R_I(t))).$$

*Доказательство.* Обозначим  $\alpha_J = \max\left(\frac{m_J}{l}, 1\right)$ ,  $p_J = p(R_J(t))$  для краткости. По определению  $u_I$  имеем:

$$1) \quad u_I(0) = \sum_{J \in \mathfrak{I}: J \subseteq I} \int_0^{\min(b_J, 0)} \alpha_J dp_J(t) = 0.$$

- 2) Так как  $I = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_k$ , то при  $t = a_I$

$$\begin{aligned} u_I(t) &= \sum_{J \in \mathfrak{I}: J \subseteq I} \int_{a_J}^{\min(b_J, t)} \alpha_J dp_J(t) = \\ &= \underbrace{\int_{a_I}^{\min(b_I, t)} \alpha_I dp_I(t)}_{=0} + \sum_{i=1}^k \underbrace{\sum_{J \in \mathfrak{I}: J \subseteq J_i} \int_{a_J}^{\min(b_J, t)} \alpha_J dp_J(t)}_{=u_{J_i}(t)} = \sum_{i=1}^k u_{J_i}(t). \end{aligned}$$

3) Пусть  $t \in [a_I, b_I]$ . По пункту 1 леммы 2 элементы  $\mathfrak{I}(t')$  не пересекаются при  $t' \geq 0$ , значит  $b_J \leq a_I \leq t$  для всех  $J \subsetneq I$ , поэтому

$$\begin{aligned} u_I(t) &= \sum_{J \in \mathfrak{I}: J \subsetneq I} \int_{a_J}^{\min(b_J, t)} \alpha_J dp_J(t) = \\ &= \sum_{J \in \mathfrak{I}: J \subsetneq I} \int_{a_J}^{\min(b_J, a_I)} \alpha_J dp_J(t) + \int_{a_I}^{\min(b_I, t)} \alpha_I dp_I(t) = \\ &= u_I(a_I) + \int_{a_I}^t \alpha_I dp_I(t). \end{aligned}$$

□

Заметим, что поскольку интегрируется константа, то

$$u_I(t) = u_I(a_I) + \max\left(\frac{m_I}{l}, 1\right) (p(R_I(t)) - p(R_I(a_I))). \quad (10)$$

С учётом леммы 2, для всех  $i \in I$  выполнено

$$u_I(t) = u_I(a_I) + 6 \max\left(\frac{m_I}{l}, 1\right) (r_i(t) - r_i(a_I)). \quad (11)$$

Используя (4), это можно переписать также в виде

$$u_I(t) = u_I(a_I) + 6 \max\left(\frac{m_I}{l}, 1\right) \Delta r_I(a_I, t). \quad (12)$$

**Лемма 5.** Для любого  $t \geq 0$  и  $I \in \mathfrak{I}(t)$  верна оценка:

$$u_I(t) \geq 3G_I(t).$$

*Доказательство.* Будем строить рассуждения индукцией по мощности множества  $I$ .

**База индукции:**  $|I| = 1$  (множество  $R_I(t)$  состоит из одного шара). Тогда  $I = \{i\}$  для некоторого  $i \in [s]$  и  $I \in \mathfrak{I}(0)$ , значит  $a_I = 0$ . Тогда из (11) получим:

$$u_I(t) = u_I(0) + 6 \max\left(\frac{m_I}{l}, 1\right) (r_i(t) - r_i(0)) \geq 6r_i(t).$$

Поскольку в дереве  $T_I$  всего одна вершина  $c_i$ , поэтому  $w(T_I) = 0$ ,  $\deg c_i = 0$ , значит

$$G_I(t) = T_I + (2 - \deg_{T_I}(c_i))r_i(t) = 2r_i(t) \leq \frac{1}{3}u_I(t).$$

**Шаг индукции:**  $|I| > 1$ . Предположим, что условие леммы выполнено для всех  $J \in \mathfrak{J}$  мощности  $|J| < |I|$ . Поскольку  $I$  фиксировано, для краткости обозначим  $a = a_I$ .

Сначала покажем, что  $u_I(a) \geq G_I(a)$ . Поскольку  $|I| > 1$ , то  $I \notin \mathfrak{J}(0)$ , значит  $a = a_I > 0$ , то есть  $a$  — момент объединения. Без ограничения общности считаем, что  $R_I(a) = R_{I_1}(a) \cup R_{I_2}(a)$  (см. рис. 6), иначе проделаем операцию несколько раз, последовательно добавляя элементы.

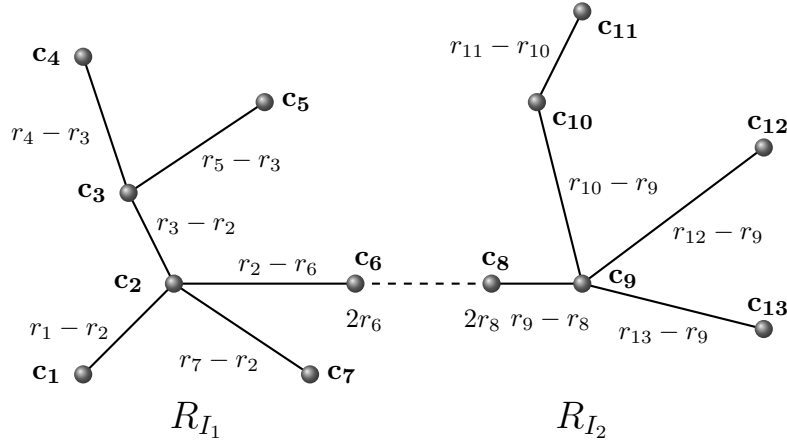


Рис. 6. Операция объединения.

По лемме 2 множества  $R_{I_1}(a)$ ,  $R_{I_2}(a)$  представляются в виде объединения шаров:

$$R_{I_1}(a) = \bigcup_{i \in I_1} B(c_i, r_i(a)), \quad R_{I_2}(a) = \bigcup_{i \in I_2} B(c_i, r_i(a)).$$

Отметим, что если множества  $R_{I_1}(a)$  и  $R_{I_2}(a)$  коснулись в точке, которая принадлежит шарам  $B(c_{j_1}, r_{j_1}(a))$  и  $B(c_{j_2}, r_{j_2}(a))$ , то  $w(\{c_{j_1}, c_{j_2}\}) = \|c_{j_1} - c_{j_2}\|_\infty = r_{j_1}(a) + r_{j_2}(a)$ . Рассмотрим дерево  $T$ , полученное соединением деревьев  $T_{I_1}$  и  $T_{I_2}$  ребром  $\{c_{j_1}, c_{j_2}\}$ . Формально, дерево  $T$  является графом с множеством вершин  $\{c_i \mid i \in I\}$  и множеством рёбер  $E(T) = E(T_{I_1}) \cup E(T_{I_2}) \cup \{\{c_{j_1}, c_{j_2}\}\}$ .

Покажем, что  $G_I^T(a) = G_{I_1}(a) + G_{I_2}(a)$ . Заметим, что степени всех в дереве  $T$ , кроме  $c_{j_1}$  и  $c_{j_2}$ , совпадают со степенями соответствующих вершин в деревьях  $T_{I_1}$  и  $T_{I_2}$ , а  $\deg_T(c_{j_k}) = \deg_{T_{I_k}}(c_{j_k}) + 1$  при  $k = 1, 2$ .

$$\begin{aligned} G_I^T(t) - G_{I_1}(t) - G_{I_2}(t) &= w(T) - w(T_{I_1}) - w(T_{I_2}) + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{i \in I_k} (\deg_{T_{I_k}}(c_i) - \deg_T(c_i)) r_i(t) = w(\{c_{j_1}, c_{j_2}\}) - \sum_{k=1}^2 r_{j_k}(t) = 0. \end{aligned}$$



Поскольку  $|I_1| \leq |I| - 1$ ,  $|I_2| \leq |I| - 1$  и  $a = b_{I_1} = b_{I_2}$ , то по предположению индукции имеем:

$$u_{I_1}(a) \geq 3G_{I_1}(a), \quad u_{I_2}(a) \geq 3G_{I_2}(a).$$

Таким образом, получаем оценку:

$$u_I(a) = u_{I_1}(a) + u_{I_2}(a) \geq 3G_{I_1}(a) + 3G_{I_2}(a) = 3G_I^T(a) \geq 3G_I(a). \quad (13)$$

Пусть  $t \in [a_I, b_I]$ , тогда, применяя (12), затем (13) и (8), получим:

$$\begin{aligned} u_I(t) &= u_I(a_I) + 6 \max\left(\frac{m_I}{l}, 1\right) \Delta r_I(a_I, t) \geq \\ &\geq u_I(a_I) + 6\Delta r_I(a_I, t) \geq 3(G_I(a_I) + 2\Delta r_I(a_I, t)) = 3G_I(t), \end{aligned}$$

что и требовалось.  $\square$

**Лемма 6.** *Для любого измеримого ограниченного множества  $A$  выполнено*

$$p(A) \geq 3(V(A))^{1/3}.$$

*Доказательство.* Пусть  $P$  — стягивающий параллелепипед для множества  $A$ . Тогда по определению  $p$  и по неравенству средних выполнено

$$p(A) = \sum_{i=1}^3 \ell_i(A) \geq 3\sqrt[3]{\ell_1(R_I) \cdot \ell_2(R_I) \cdot \ell_3(R_I)} = 3\sqrt[3]{V(P)}.$$

Поскольку  $A \subseteq P$ , то  $V(A) \leq V(P)$ , отсюда следует утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 7** (Изопериметрическое неравенство). *Для любого многогранника  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  с гранями, параллельными координатным плоскостям, верна следующая оценка:*

$$S \geq 6 \cdot V^{2/3},$$

где  $S$  — площадь поверхности множества  $A$ ,  $V$  — объём  $A$ .

*Доказательство.*

Искомую оценку получим, используя аналогичный результат в плоскости и интегрируя его по слоям (см. рис. 7). Обозначим  $w(x)$ ,  $x \in [0; h]$  длину границы слоя ( $x$  — параметр, указывающий высоту слоя),  $s(x)$  — площадь слоя. Также обозначим  $s_{\max} = \max_{x \in [0; h]} s(x)$ . Тогда площадь горизонтальных граней множества  $A$  не меньше  $2s_{\max}$ . Выражая площадь вертикальных граней и объём множества  $A$  через интеграл, получим:

$$S \geq \int_0^h w(x)dx + 2s_{\max}, \quad V = \int_0^h s(x)dx.$$

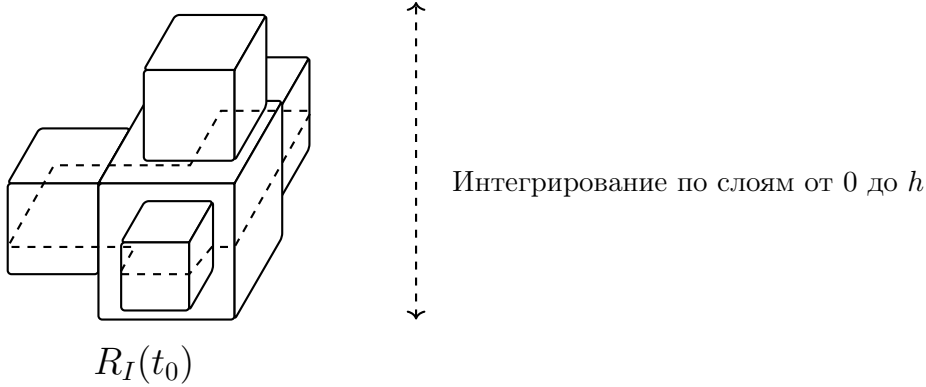


Рис. 7. Оценка площади боковой поверхности через объём.

Существует аналог искомого утверждения для плоского случая, который был показан в работе [14, стр.20, лемма 11]:

$$w(x) \geq 4\sqrt{s(x)}.$$

Используя данное неравенство и неравенство средних, получаем:

$$\begin{aligned} S &\geq \int_0^h w(x)dx + 2s_{max} \geq \int_0^h 4\sqrt{s(x)}dx + 2s_{max} = \\ &= 2 \left( \int_0^h \sqrt{s(x)}dx + \int_0^h \sqrt{s(x)}dx + s_{max} \right) \geq \\ &\geq 6 \sqrt[3]{\left( \int_0^h \sqrt{s(x)}dx \right)^2 \cdot s_{max}} = 6 \sqrt[3]{\left( \int_0^h \sqrt{s(x) \cdot s_{max}}dx \right)^2} \geq \\ &\geq 6 \sqrt[3]{\left( \int_0^h s(x)dx \right)^2} = 6V^{2/3}. \end{aligned}$$

□

По лемме 2 множество  $R_I(t)$  является объединением шаров в метрике  $l_\infty$ . Шар в метрике  $l_\infty$  является кубом с гранями, параллельными координатным плоскостям, а значит  $R_I(t)$  является многогранником с гранями, параллельными координатным плоскостям. Таким образом, по лемме 7 имеем

$$s_I(t) \geq 6 \cdot (v_I(t))^{2/3}.$$

Нам понадобится следующая простая лемма

**Лемма 8.** Для любых  $a, b \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство:

$$(a - b)(a^3 - b^3) \geq \frac{3}{4}(a^2 - b^2)^2.$$

*Доказательство.* Вычтем из левой части неравенства правую часть, домножим на 4 и преобразуем:

$$\begin{aligned} 4(a - b)(a^3 - b^3) - 3(a^2 - b^2)^2 &= \\ &= 4(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) - 3(a - b)^2(a + b)^2 = \\ &= (a - b)^2(4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3(a + b)^2) = \\ &= (a - b)^4 \geq 0. \end{aligned}$$

□

**Лемма 9.** Для любого  $t \geq 0$  и  $I \in \mathfrak{I}(t)$  верна следующая оценка:

$$G_I(t) \geq \frac{1}{96} \cdot \frac{s_I^2(t)}{v_I(t)},$$

где  $s_I(t)$  — площадь поверхности  $R_I(t)$ ,  $v_I(t)$  — объём  $R_I(t)$ .

*Доказательство.* Поскольку параметр  $t$  в данной лемме фиксирован, то далее будем его опускать для упрощения обозначений.

По лемме 2 множество  $R_I$  является объединением шаров  $R_I(t) = \bigcup_{i \in I} B(c_i, r_i)$ .

Для доказательства нам понадобится по индукции собирать множество  $R_I(t)$  из шаров, поэтому введём вспомогательные множества  $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_{|I|} = I$ , а также для  $k = 1, \dots, |I|$  определим множество

$$A_k = \bigcup_{i \in J_k} B(c_i, r_i)$$

и граф  $T_k$  — подграф  $T_I$  с множеством вершин  $\{c_i \mid i \in J_k\}$ . Множества  $J_k$  построим так, чтобы  $T_k$  было деревом с  $k$  вершинами, причём  $T_{|I|} = T_I$  и  $T_{k-1}$  получалось из  $T_k$  удалением одного листа для  $k = 2, \dots, |I|$ .

По индукции покажем, что

$$G_{J_k}^{T_k} \geq \frac{1}{96} \cdot \frac{S^2(A_k)}{V(A_k)}.$$

**База индукции:**  $k = 1$ , тогда  $J_1 = \{j\}$  для некоторого  $j \in I$  и  $A_1$  является шаром с радиусом  $r_j$ , поэтому

$$G_j = 2r_j, \quad S(A_1) = 24r_j^2, \quad V(A_1) = 8r_j^3.$$

Подставим в правую часть:

$$\frac{1}{96} \cdot \frac{S(A_1)^2}{V(A_1)} = \frac{1}{96} \cdot \frac{24^2 r_j^4}{8r_j^3} = \frac{3}{4} r_j.$$

Таким образом, неравенство верно при  $k = 1$ .

**Переход индукции.** Пусть  $k < |I|$  и  $J_{k+1} = J_k \cup \{j\}$ , причём  $c_j$  — лист в дереве  $T_{k+1}$ . Пусть  $c_i$  — та вершина  $T_k$ , к которой присоединён лист  $c_j$ ,  $d = w(\{c_i, c_j\})$  — вес ребра, присоединяющего лист  $c_j$  к поддереву  $T_k$ . Для краткости обозначим

$$\begin{aligned} S &= S(A_k), & V &= V(A_k), & G &= G_{J_k}^{T_k}, \\ S' &= S(A_{k+1}), & V &= V(A_{k+1}), & G &= G_{J_{k+1}}^{T_{k+1}}. \end{aligned}$$

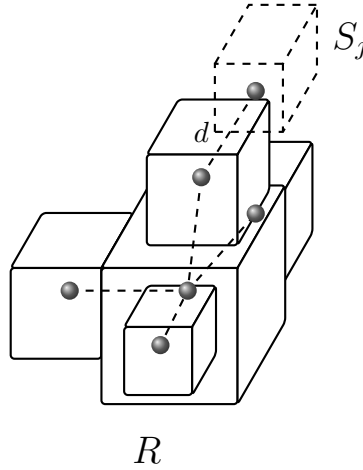


Рис. 8. Переход индукции.

По предположению индукции имеем:

$$G \geq \frac{1}{96} \cdot \frac{S^2}{V}. \quad (14)$$

Докажем, что:

$$G' \geq \frac{1}{96} \cdot \frac{S'^2}{V'}. \quad (15)$$

Также обозначим  $\Delta G = G' - G$ ,  $\Delta S = S' - S$ ,  $\Delta V = V' - V$ . Напомним, что по определению  $A_{k+1} = A_k \cup B(c_j, r_j)$ . Нетрудно убедиться, что выполнены равенства:

$$\Delta G = d + r_j - r_i, \quad \Delta S = 24r_j^2 - s, \quad \Delta V = 8r_j^3 - v, \quad (16)$$

где  $s$  и  $v$  — соответственно площадь поверхности и объём множества  $A_k \cap B(c_j, r_j)$ .

Заметим, что неравенство (15) равносильно:

$$(G + \Delta G)(V + \Delta V) \geq \frac{1}{96} \cdot (S + \Delta S)^2. \quad (17)$$

Докажем вспомогательное неравенство:

$$\Delta G \cdot \Delta V \geq \frac{1}{96} (\Delta S)^2. \quad (18)$$

Сначала оценим  $\Delta G$  снизу, а именно, покажем, что

$$\Delta G \geq r_j - \frac{1}{2}v^{1/3}, \quad (19)$$

- 1) Если  $r_i \leq d$ , то  $\Delta G = d - r_i + r_j \geq r_j$ , и (19) выполнено.
- 2) Рассмотрим случай  $r_i > d$ . По лемме 2 шар  $B(c_j, r_j)$  не вложен в шар  $B(c_i, r_i)$ . Тогда заметим, что множество  $A_k \cap B(c_j, r_j)$  содержит пересечение  $B(c_i, r_i) \cap B(c_j, r_j)$ , внутри которого помещается шар радиуса  $r_i - d$  (см. рис. 9).

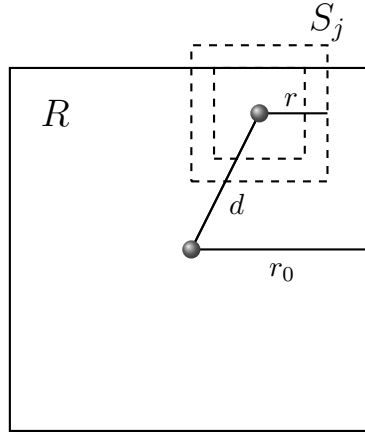


Рис. 9. Переход индукции при  $d \leq r_i$ .

Таким образом, имеет место неравенство  $v \geq (2(r_i - d))^3$ , а значит  $r_i - d \leq \frac{1}{2}v^{1/3}$ , значит (19) выполнено.

Используя (19), (16), затем лемму 8 при  $a = 2r_j$ ,  $b = v^{1/3}$ , получим

$$\Delta G \cdot \Delta V \geq \left( r_j - \frac{1}{2}v^{1/3} \right) (8r_j^3 - v) \geq \frac{3}{8} (4r_j^2 - v^{2/3})^2. \quad (20)$$

Применяя лемму 7 для множества  $A_k \cap B(c_j, r_j)$ , имеем  $s \geq 6v^{2/3}$ , значит с учётом (20) получим

$$\frac{1}{96} \Delta S^2 = \frac{1}{96} (24r_j^2 - s)^2 \leq \frac{1}{96} (24r_j^2 - 6v^{2/3})^2 = \frac{3}{8} (4r_j - v^{2/3})^2 \leq \Delta G \cdot \Delta V.$$

Таким образом, вспомогательное неравенство (18) доказано. Используя его, докажем основное неравенство (17):

$$(G + \Delta G)(V + \Delta V) \geq \frac{1}{96} \cdot (S + \Delta S)^2$$

$$G \cdot V + \Delta G \cdot V + \Delta V \cdot G + \Delta G \cdot \Delta V \geq \frac{1}{96} (S^2 + 2S \cdot \Delta S + (\Delta S)^2)$$

По неравенству (14) имеем:

$$G \cdot V \geq \frac{1}{96} S^2. \quad (21)$$

Далее по неравенству средних и из неравенств (21), (18) следует:

$$\Delta G \cdot V + \Delta V \cdot G \geq 2\sqrt{G \cdot V \cdot \Delta V \cdot \Delta G} \geq \frac{1}{96} (2S \cdot \Delta S). \quad (22)$$

Таким образом, сложив неравенства (21), (18) и (22), получим требуемое неравенство (17).  $\square$

В качестве прямого следствия из лемм 5 и 9 получаем утверждение:

**Лемма 10.** Для любого  $t \geq 0$ ,  $I \in \mathfrak{I}(t)$  верна следующая оценка:

$$u_I(t) \geq \frac{1}{32} \cdot \frac{s_I^2(t)}{v_I(t)},$$

где  $s_I(t)$  — площадь поверхности  $R_I(t)$ ,  $v_I(t)$  — объём  $R_I(t)$ .

Также имеет место следующее соотношение:

**Лемма 11.** Для любого множества  $I \in \mathfrak{I}$ ,  $t \in (a_I, b_I)$  верно равенство:

$$v_I'(t) = \frac{1}{6} s_I(t) p_I'(t),$$

где  $s_I(t)$  — площадь поверхности  $R_I(t)$ ,  $v_I(t)$  — объём  $R_I(t)$ .

*Доказательство.* По определению производной с учётом леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned} v_I'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_I(t) - v_I(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_I(t) - v_I(t_0)}{\Delta r_I(t_0, t)} \cdot \frac{\Delta r_I(t_0, t)}{t - t_0} = \\ &= \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_I(t) - v_I(t_0)}{\Delta r_I(t_0, t)} \cdot \frac{p_I(t) - p_I(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{6} s_I(t_0) p_I'(t_0). \end{aligned}$$

$\square$

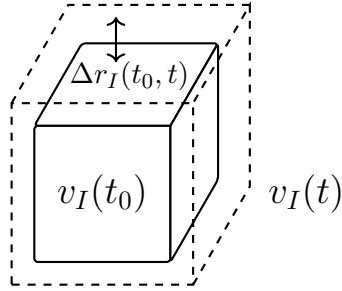


Рис. 10. Расширение множества  $R_I(t)$ .

**Лемма 12.** Для любого  $t \geq 0$ ,  $I \in \mathfrak{I}(t)$  верно следующее утверждение:

$$V(M_I(t)) \leq 8V(R_I(t)) + m_I.$$

*Доказательство.* Заметим, что множество  $M_I(t)$  состоит из  $|I|$  кубических элементов, в которых находятся выходы схемы  $K$  (на рис. 11 центры этих элементов обозначены черными точками) и оставшихся элементов (их центры обозначены серыми точками). Объем кубических элементов с выходами схемы  $K$  равен  $|I| \leq m_I$ . Объем оставшихся элементов не больше  $8V(R_I(t))$ , так как если кубический элемент  $s \in M_I(t)$ , то центр  $s$  находится в  $R_I(t)$ , а значит пересечение с множеством  $R_I(t)$  занимает не менее  $1/8$  части  $s$ . Таким образом, получаем требуемую оценку.  $\square$

### 3.5. Вспомогательные утверждения

В данном параграфе обобщим некоторые результаты для плоских схем, полученные в работе [14], на объёмные схемы, и также воспользуемся результатами работы [26]. Доказательство всех лемм аналогично и отличается лишь заменой некоторых констант, которые будут явно указаны ниже и никак не влияют на идею рассуждений.

**Определение:** Здесь и всюду далее будем полагать, что  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ . Пусть  $d = |D|$ ,  $h \geq 1$ . Обозначим за  $P_u(D, h)$  множество таких операторов  $G : D \rightarrow \{0, 1\}^h$ , что

$$\frac{1}{d} \sum_{x \in D} |G(x)| \leq u.$$

**Лемма 13.** (Калачёв Г.В., [14, лемма 1]) Если  $u \leq h$ , то

$$\log_2 |P_u(D, h)| \leq du \log_2 \frac{eh}{u}.$$

**Лемма 14.** (Ефимов А.А., [26, лемма 7]) Количество объёмных схем объёмом  $v$  не больше, чем  $2^{C_2 v}$ , где  $C_2$  — некоторая константа.

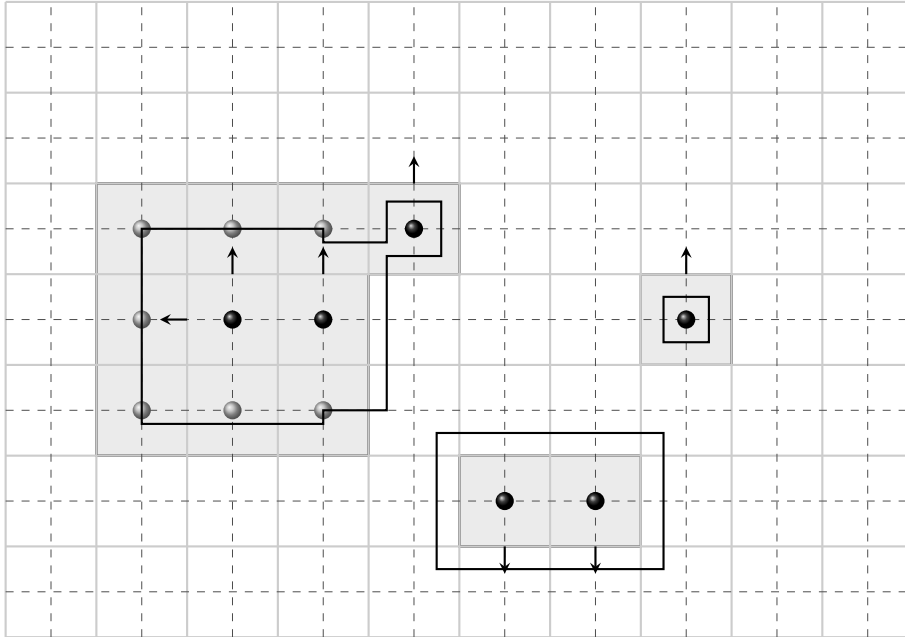


Рис. 11. Оценка  $V(M_I(t))$ .

**Определение:** Пусть у нас есть алгоритм определения *последнего слоя* схемы относительно некоторых ее выходов, который зависит только от геометрии схемы. Введём множество  $L(u, v, h, D, m)$  операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$  вида  $f = F(x, G(x))$ , где существует такая схема  $K$ , что выполнены условия:

- 1)  $K$  имеет  $m$  выходов,  $h$  входов на последнем слое и не более  $n$  входов, не лежащих на последнем слое.
- 2) объём  $K$  не превосходит  $v$ .
- 3)  $K$  реализует оператор  $F : D \times \{0, 1\}^h \rightarrow \{0, 1\}^m$ , причем последние  $h$  аргументов подаются на входы  $K$ , расположенные на последнем слое.
- 4)  $G \in P_u(D, h)$ .

**Лемма 15.** (Ефимов А.А., [26, лемма 8]) Если  $d = |D|, h \geq 1$  и  $v \leq \frac{3}{5C_3}md$ , то

$$L(u, v, h, D, m) < m!n!2^{m(1-\varepsilon_1)d}$$

при  $u \leq \frac{m}{5 \log_2 d}$ , где  $C_2$  взято из условия леммы 14,  $C_3 = \max\{C_2, 30\}, \varepsilon_1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{C_3 \ln 2}$ .



**Определение:** Пусть  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $d := |D|$ . Рассмотрим множество  $L_0(D, m)$  операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ , реализуемых некоторой схемой  $K$  так, что существует её подсхема  $K_0$ , содержащая хотя бы один выход схемы  $K$  такая, что

$$V(K_0) \leq \frac{1}{C_0} |(K_0 K)| d, \quad U_D((K_0 | K)) \leq \frac{|(K_0 K)|}{5 \log_2 d}, \quad (23)$$

где  $C_0 = \frac{5C_3}{3}$  — некоторая константа.

**Лемма 16.** (Калачёв Г.В., [13, лемма 10]) Для любой плоской схемы  $K$  и любого подмножества её выходов  $U$  существует схема  $K_U$ , носитель которой лежит в носителе схемы  $K$ , множество её выходов совпадает с  $U$  и на каждом из этих выходов  $K_U$  реализует ту же функцию, что и схема  $K$ .

Отметим, что конструктивное доказательство этого факта содержит алгоритм, который можно дословно повторить для объёмных схем (то есть он никак существенно не использует геометрию схемы).

**Лемма 17.** (Ефимов А.А., [26, лемма 10]) Пусть  $\log_2 m \leq \frac{\varepsilon_1}{6} d$ , где значение  $\varepsilon_1$  взято из условия леммы 15. Тогда  $|L_0(D, m)| = o(2^{md})$  при  $d \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2 n = o(d)$ .

Пусть у нас есть алгоритм определения *последнего слоя* схемы относительно некоторых её выходов, который зависит только от геометрии схемы.

**Определение:** Рассмотрим множество  $L_1(D, m)$  операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ , реализуемых некоторой схемой  $K$  так, что существует подсхема  $K_0$  такая, что все входы  $(K_0 | K)$  лежат на последнем слое схемы  $K_0$  относительно выходов  $(K_0 K)$  и

$$V(K_0) \leq \frac{1}{C_4} |(K_0 K)| d, \quad U_D(K_0 | K) \leq \frac{1}{9}, \quad (24)$$

где  $C_4 = \frac{32}{15} C_2$ .

**Лемма 18.** (Аналог [14, лемма 10] для объёмных схем). Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $d = |D|$ . Тогда

$$|L_1(D, m)| = o(2^{md}) \text{ при } d \rightarrow \infty, \log_2 m \leq \frac{d}{50}, \quad n \log_2 n = o(d).$$

*Доказательство.* Отметим, что подобный выбор константы  $C_4$  в определении класса  $L_1$  позволил оставить все технические выкладки в неизменном виде. Единственный геометрический факт, который следует учесть: имеется не более  $2^{C_2 \frac{1}{C_4} m_0 d} = 2^{\frac{15}{32} m_0 d}$  схем объёма не более  $\frac{1}{C_4} m_0 d$  (лемма 14).  $\square$

Отметим, что определение и свойства классов  $L_0(D, m)$  и  $L_1(D, m)$  не зависят от геометрии схемы и аналогично обобщается на объёмные схемы, чем мы будем пользоваться в дальнейшем. Также формально положим:

$$\alpha = \frac{1}{16} \min \left( \frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_4} \right).$$

### 3.6. Основное доказательство

**Лемма 19.** *Для любого  $t \geq 0$  и множества  $I \in \mathfrak{I}(t)$  верны следующие оценки:*

- 1)  $u_I(t) \geq p(R_I(t));$
- 2)  $u_I(t) \geq 2 \frac{m_I t^{1/3}}{l^{2/3}}.$

*Доказательство.* Проведём доказательство индукцией по мощности множества  $I$ .

**База индукции:**  $|I| = 0$ . Поскольку  $\emptyset \notin \mathfrak{I}$ , то здесь доказывать нечего.

**Шаг индукции:**  $|I| \geq 1$ .

**I.** Сначала покажем, что условие леммы выполнено при  $t = a_I$ .

**Ia.** Если  $|I| = 1$ , то  $I \in \mathfrak{I}(0)$ , значит  $t = a_I = 0$ . Легко видеть, что  $u_I(0) = p(R_I(0)) = 2 \frac{m_I t^{1/3}}{l^{2/3}} = 0$ , и условия леммы выполнены.

**Ib.** Рассмотрим основной случай, когда  $|I| \geq 2$ . В этом случае множество  $R_I(a_I)$  получено из множеств  $R_{I_1}(a_I), \dots, R_{I_k}(a_I)$  с помощью операции **объединения**.

Покажем, что неравенства 1), 2) сохраняются при операции объединения в момент  $t = a_I$ . Поскольку в данном случае  $t$  фиксировано, опустим его для упрощения обозначений.

- 1)  $u_I = \sum_{j=1}^k u_{I_j}$  по определению. Верна оценка

$$\ell_q(R_I) = \ell_q \left( \bigcup_{j=1}^k R_{I_j} \right) \leq \sum_{j=1}^k \ell_q(R_{I_j}), \quad q = 1, 2, 3.$$

Складывая неравенства, получаем

$$p(R_I) = \sum_{q=1}^3 \ell_q(R_I) \leq \sum_{j=1}^k \sum_{q=1}^3 \ell_q(R_{I_j}) = \sum_{j=1}^k p(R_{I_j}).$$

Поскольку  $|I_j| \leq |I|$ ,  $j = 1, \dots, k$ , то по предположению индукции верно

$$u_{I_j} \geq p(R_{I_j}), \quad j = 1, \dots, k.$$

Отсюда получаем оценку

$$u_I = \sum_{j=1}^k u_{I_j} \geq \sum_{j=1}^k p(R_{I_j}) \geq p(R_I).$$

2) По определению и свойствам  $u_I$ , верно  $u_I = \sum_{j=1}^k u_{I_j}$ ,  $m_I = \sum_{j=1}^k m_{I_j}$ .

По предположению индукции имеем:

$$u_J \geq 2 \frac{m_J t^{1/3}}{l^{2/3}}, \quad J = I_1, \dots, I_k.$$

Складывая неравенства, получаем требуемую оценку:

$$u_I = \sum_{j=1}^k u_{I_j} \geq \sum_{j=1}^k 2 \frac{m_{I_j} t^{1/3}}{l^{2/3}} = 2 \frac{m_I^{2/3} v_I^{1/3}}{l^{2/3}}.$$

**II.** Покажем, что утверждение леммы верно для всех  $t \in (a_I, b_I]$ .

1) Покажем, что

$$u_I(t) \geq p(R_I(t)) \quad \text{при} \quad t \in [a_I, b_I]. \quad (25)$$

Случай  $t = a_I$  рассмотрен в пункте I. Из (10) имеем:

$$\begin{aligned} u_I(t) &= u_I(a_I) + \max\left(\frac{m_I}{l}, 1\right) (p(R_I(t)) - p(R_I(a_I))) \geq \\ &\geq u_I(t_i) + (p(R_I(t)) - p(R_I(t_i))) \geq p(R_I(t)). \end{aligned}$$

2) Напомним, что по построению выполнено равенство  $v_I(t) = m_I t$ . Поэтому условие пункта 2) эквивалентно следующему:

$$u_I(t) \geq 2 \frac{m_I^{2/3} v_I^{1/3}(t)}{l^{2/3}}.$$

Преобразуем:

$$u_I^{3/2}(t) \geq 2^{3/2} \cdot \frac{m_I}{l} v_I^{1/2}(t). \quad (26)$$

Заметим, что так как неравенство верно при  $t = a_I$  по пункту I, то достаточно показать, что:

$$\left(u_I^{3/2}(t)\right)' \geq 2^{3/2} \left(\frac{m_I}{l} v_I^{1/2}(t)\right)' \quad \text{при} \quad a_I < t < b_I.$$

Преобразуем неравенство:

$$\frac{3}{2}(u_I(t))^{1/2} u_I'(t) \geq \sqrt{2} \cdot \frac{m_I}{l} \frac{v_I'(t)}{(v_I(t))^{1/2}}. \quad (27)$$

По определению  $u_I(t)$  имеем неравенство:

$$u_I'(t) \geq \frac{m_I}{l} p_I'(t). \quad (28)$$

Также из лемм 10 и 11 имеем:

$$(u_I(t))^{1/2} \geq \sqrt{\frac{1}{32} \frac{s_I(t)}{(v_I(t))^{1/2}}} = \frac{3}{\sqrt{8}} \frac{v_I'(t)}{(v_I(t))^{1/2} \cdot p_I'(t)}. \quad (29)$$

Перемножив неравенства (28) и (29) и огрубив константу, получим неравенство (27).

Таким образом, основная лемма доказана.  $\square$

**Теорема 1.** Если  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ , то для некоторой константы  $C > 0$  верно

$$U(f) \geq C \frac{m \sqrt[3]{|D|}}{\min^{2/3}(m, \log_2 |D|)}$$

для почти всех операторов  $f \in P_2(D, m)$  при  $n \log_2 n = o(|D|)$ ,  $\log_2 m = o(2^n)$ ,  $|D| \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Обозначим  $d := |D|$ ,  $l := \log_2 d$ . Можно считать, что  $d$  достаточно велико, и  $d \geq \frac{1}{8\alpha}$ . Зафиксируем произвольный оператор  $f \in P_2(D, m) \setminus L_0(D, m) \setminus L_1(D, m)$  и оценим его средний потенциал. Заметим, что по леммам 17 и 18 верно  $|L_0(D, m) \cup L_1(D, m)| = o(2^{md})$ . Таким образом, полученная далее оценка верна для почти всех операторов из  $P_2(D, m)$  при  $n \log_2 n = o(d)$ ,  $\log_2 m = o(2^n)$ ,  $d \rightarrow \infty$ . Зафиксируем схему  $K$ , реализующую  $f$  с минимальным потенциалом (то есть, такую, что  $U_D(K) = U(f)$ ), и построим для неё расслоение  $\mathfrak{R}$ .

Обозначим  $t_0 = \alpha d$ . По лемме 12 и определению  $\alpha$  для  $t \in [0, t_0]$  имеем:

$$\begin{aligned} V(M_I(t)) &\leq 8V(R_I(t)) + m_I = 8m_I t + m_I \leq \\ &\leq 8\alpha d m_I + m_I = (8\alpha d + 1) |(M_I(t)K)| \leq \\ &\leq 16\alpha d \cdot |(M_I(t)K)| = \min\left(\frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_4}\right) d \cdot |(M_I(t)K)|. \end{aligned}$$

Поэтому раз  $f \notin L_0(D, m) \cup L_1(D, m)$ , то при  $t \in [0, t_0]$  выполнено

$$U_D(M_I(t)|K) \geq \max\left(\frac{1}{9}, \frac{(M_I(t)K)}{5l}\right) \geq \frac{1}{9} \max\left(1, \frac{m_I}{l}\right). \quad (30)$$

Обозначим  $\mathfrak{J}_0 = \bigcup_{t \in [0, t_0]} \mathfrak{J}(t)$ . Заметим, что

$$\mathfrak{J}_0 = \bigsqcup_{I \in \mathfrak{J}(t_0)} \{J \in \mathfrak{J} \mid J \subseteq I\}.$$

Из неравенств (7), (30) и определения  $u_I(t)$  получаем:

$$\begin{aligned} U_D(K) &\geq \frac{1}{6} \int_{\mathfrak{R}} U_D(K(R)|K) d\rho(R) \geq \\ &\geq \frac{1}{6} \sum_{I \in \mathfrak{J}_0} \int_{a_I}^{\min(b_I, t_0)} U_D(M_I(t)|K) dp(R_I(t)) \geq \\ &\geq \frac{1}{54} \sum_{I \in \mathfrak{J}_0} \int_{a_I}^{\min(b_I, t_0)} \max\left(1, \frac{m_I}{l}\right) dp(R_I(t)) \geq \\ &= \frac{1}{54} \sum_{I \in \mathfrak{J}(t_0)} \sum_{J \in \mathfrak{J}: J \subseteq I} \int_{a_I}^{\min(b_I, t_0)} \max\left(1, \frac{m_J}{l}\right) dp(R_J(t)) = \\ &= \frac{1}{54} \sum_{I \in \mathfrak{J}(t_0)} u_I(t_0). \end{aligned}$$

Из леммы 6 и пункта 1) леммы 19 следует:

$$u_I(t) \geq p(R_I(t)) \geq 3v_I(t)^{1/3}.$$

Так как по построению множества  $R_I(t)$  верно равенство  $v_I(t) = m_I \cdot t$ , то имеем неравенство:

$$U_D(K) \geq \frac{1}{54} \sum_{I \in \mathfrak{J}(t_0)} u_I(t_0) \geq \frac{1}{18} \sum_{I \in \mathfrak{J}(t_0)} v_I(t_0)^{1/3} = \frac{t_0^{1/3}}{18} \sum_{I \in \mathfrak{J}(t_0)} m_I^{1/3}. \quad (31)$$

Также заметим, что если дан вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_s), x_i \geq 0, i \in [s]$ , то по неравенству Минковского в пространстве  $l_3$  имеем:

$$(x_1^3)^{1/3} + (x_2^3)^{1/3} + \dots + (x_s^3)^{1/3} \geq (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_s^3)^{1/3},$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_s \geq (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_s^3)^{1/3}.$$

Заменяя  $m_i = x_i^3, i \in [s]$ , получим неравенство:

$$m_1^{1/3} + m_2^{1/3} + \dots + m_s^{1/3} \geq (m_1 + m_2 + \dots + m_s)^{1/3}.$$

Воспользуемся полученным результатом и продолжим неравенство (31):

$$U_D(K) \geq \frac{1}{18} \left( \sum_{I \in \mathcal{J}(t_0)} m_I^{1/3} \right) \cdot t_0^{1/3} \geq \frac{1}{18} m^{1/3} \cdot t_0^{1/3} = \frac{\alpha^{1/3}}{18} \sqrt[3]{m \cdot d}. \quad (32)$$

При  $m > l$  по пункту 2) леммы 12 получаем:

$$\begin{aligned} U_D(K) &\geq \frac{1}{54} \sum_{I \in \mathcal{J}(t_0)} u_I(t_0) \geq \\ &\geq \frac{1}{27} \sum_{I \in \mathcal{J}(t_0)} \frac{m_I \cdot t_0^{1/3}}{l^{2/3}} = \frac{1}{27} \frac{m \cdot t_0^{1/3}}{l^{2/3}} = \frac{\alpha^{1/3}}{27} \frac{m \sqrt[3]{d}}{l^{2/3}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Соединив результаты неравенств (32) и (33) и приняв  $C = \alpha^{1/3}/27$ , получаем требуемое условие теоремы.  $\square$

## Список литературы

- [1] Muller D.E., "Complexity in Electronics Switching Circuits", *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**, no. 1 (1956), 15–19.
- [2] Вайнцвайг М.Н., "О мощности схем из функциональных элементов", *Докл. АН СССР*, **Т. 139**, № 2 (1961), 320–323.
- [3] Лупанов О.Б., "Об одном подходе к синтезу управляющих систем – принципе локального кодирования", *Проблемы кибернетики*, **14** (1965), 31–110.
- [4] Кравцов С.С., "О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов", *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [5] Коршунов А.Д., "Об оценках сложности из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов", *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.
- [6] Касим-Заде О.М., "Об одной мере сложности схем из функциональных элементов", *Проблемы кибернетики*, **38** (1981), 117–179.

- [7] Шкаликова Н.А., “О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, **2** (1989), 177–197.
- [8] Ложкин С.А., Рыбко А.И., Сапоженко А.А., Хромкович Ю., Шкаликова Н.А., “Об одном подходе к оценке пространственной сложности схем из функциональных элементов”, *Mathematical Problems in Computation Theory. Banach Center Publications*, 1987, 501–510.
- [9] Черемисин О.В., “Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций”, *Дискретная математика*, **15:2** (2003), 113–122.
- [10] Ronnie Barequet, Gill Barequet, Gunter Rote, “Formulae and Growth Rates of High-Dimensional Polycubes”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **34** (2009), 459–463..
- [11] Шуткин Ю.С., “Об одновременной минимизации объёмной и временной сложности контактных и вентильных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **14**, № 1-4 (2010), 595–615.
- [12] Чашкин А.В., “Дискретная математика”, *Академия Москва*, 2012, 352.
- [13] Калачёв Г.В., “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26:1** (2014), 49–74.
- [14] Калачёв Г.В., “Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18:2** (2014), 279–322.
- [15] Калачёв Г.В., “Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:2** (2016), 203–266.
- [16] Калачёв Г.В., “Об оценках мощности плоских схем для замкнутых классов булевых функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:3** (2016), 52–57.
- [17] Калачёв Г.В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:1** (2017).
- [18] Калачёв Г.В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:2** (2017).

- [19] Калачёв Г.В., “Обобщение оценок мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, **73**:3 (2018), 60–64.
- [20] Калачёв Г.В., “О нижней оценке максимального потенциала плоских схем с несколькими выходами через площадь”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:1 (2018), 111–117.
- [21] Ефимов А.А., “Верхняя оценка энергопотребления в классе объемных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 117–132.
- [22] Ефимов А.А., “Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:2 (2019), 105–124.
- [23] Сытдыков Т.Р., “Сложность синтеза многомерных прямоугольных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:3 (2019), 61–80.
- [24] Сытдыков Т.Р., Калачёв Г.В., “Сложность многослойных  $d$ -мерных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:2 (2021), 131–154.
- [25] Воротников А.С., “Верхние оценки переключательной мощности плоских схем, реализующих автономные автоматные функции”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:4 (2021), 96–99.
- [26] Ефимов А.А., “Оценки энергопотребления для класса объемных схем с близкими выходами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **27**:3 (2022), 109–150.

### **Lower estimate of potential for a class of volume circuits.**

**Efimov A.A.**

In this paper, volume circuits are considered, which are the embeddings of Boolean circuits in space. For volume circuits, the lower bound on the potential is obtained. Potential is a measure of circuit activity equal to the number of gates that produce one on a given input. It is shown that for almost all partial operators with  $n$  inputs and  $m$  outputs, the potential of the volume circuit that implements them is not less than  $\frac{m \sqrt[3]{d}}{\min^{2/3}(m, \log_2 d)}$ , where  $d$  is the size of the domain.

**Keywords:** Boolean circuits, volume circuits, circuit complexity, circuit activity, potential.



## References

- [1] Muller D.E., “Complexity in Electronics Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**, no. 1 (1956), 15–19.
- [2] Weinzweig M.N., “On the power of circuits from functional elements”, *Report of the Academy of Sciences of the USSR*, **T. 139**, № 2 (1961), 320–323.
- [3] Lupanov O.B., “On one approach to the synthesis of control systems - the principle of local coding”, *Problems of cybernetics*, **14** (1965), 31–110.
- [4] Kravtsov S.S., “On the implementation of logic algebra functions in one class of circuits from functional and switching elements”, *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 285–293.
- [5] Korshunov A.D., “On complexity estimates from three-dimensional functional elements and three-dimensional circuits from functional elements”, *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 275–283.
- [6] Qasim-Zade O.M., “On one measure of complexity of circuits from functional elements”, *Problems of cybernetics*, **38** (1981), 117–179.
- [7] Shkalikova N.A., “On the implementation of Boolean functions by circuits of cellular elements”, *Mathematical problems of cybernetics*, **2** (1989), 177–197.
- [8] Lozhkin S.A., Rybko A.I., Sapozhenko A.A., Khromkovich Yu., Shkalikova N.A., “On one approach to estimating the spatial complexity of circuits from functional elements”, *Mathematical Problems in Computation Theory. Banach Center Publications*, 1987, 501–510.
- [9] Cheremisin O.V., “On the activity of schemes of cellular elements that implement the system of all conjunctions”, *Discrete Math*, **15:2** (2003), 113–122.
- [10] Ronnie Barequet, Gill Barequet, Gunter Rote, “Formulae and Growth Rates of High-Dimensional Polycubes”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **34** (2009), 459–463..
- [11] Shutkin Yu.S., “On the Simultaneous Minimization of the Volumetric and Time Complexity of Contact and Gate Circuits”, *Intelligent systems*, **14**, № 1-4 (2010), 595–615.
- [12] Chashkin A.V., “Discrete Math”, *Academy Moscow*, 2012, 352.

- [13] Kalachev G.V., “Power order of flat circuits that implement Boolean functions”, *Discrete Math*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [14] Kalachev G.V., “Lower Bounds for the Cardinality of Planar Circuits Implementing Partial Boolean Operators”, *Intelligent systems*, **18**:2 (2014), 279–322.
- [15] Kalachev G.V., “On the Simultaneous Minimization of Area, Power, and Depth of Flat Circuits Realizing Partial Boolean Operators”, *Intelligent systems*, **20**:2 (2016), 203–266.
- [16] Kalachev G.V., “On Estimates for the Cardinality of Flat Circuits for Closed Classes of Boolean Functions”, *Intelligent systems*, **20**:3 (2016), 52–57.
- [17] Kalachev G.V., “Estimates for the Power of Flat Circuits Implementing Functions with a Limited Number of Ones”, *Intelligent systems*, **21**:1 (2017).
- [18] Kalachev G.V., “Estimates for the Power of Flat Circuits Implementing Monotone Functions”, *Intelligent systems*, **21**:2 (2017).
- [19] Kalachev G.V., “Generalization of Cardinality Estimates for Planar Circuits Implementing Partial Boolean Operators”, *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*, **73**:3 (2018), 60–64.
- [20] Kalachev G.V., “On a lower bound for the maximum potential of planar circuits with several outputs through an area”, *Intelligent systems*, **22**:1 (2018), 111–117.
- [21] Efimov A.A., “Upper estimate of power consumption in the class of volumetric circuits”, *Intelligent systems*, **23**:1 (2019), 117–132.
- [22] Efimov A.A., “Upper Bound for Energy Consumption of Volumetric Circuits Implementing Boolean Operators”, *Intelligent systems*, **23**:2 (2019), 105–124.
- [23] Sytdykov T.R., “Complexity of synthesis of multidimensional rectangular schemes”, *Intelligent systems*, **23**:3 (2019), 61–80.
- [24] Sytdykov T.R., Kalachev G.V., “Complexity of multilayer d-dimensional circuits”, *Intelligent systems*, **25**:2 (2021), 131–154.
- [25] Vrotnikov A.S., “Upper Bounds for the Switching Power of Flat Circuits Realizing Autonomous Automaton Functions”, *Intelligent systems*, **25**:4 (2021), 96–99.

- [26] Efimov A.A., “Energy consumption estimates for a class of volumetric circuits with similar outputs”, *Intelligent systems*, **27**:3 (2022), 109–150.