Генерация тестовых матриц с заданным числом обусловленности

Д. В. Парфенов[1], А. М. Чешкова[2]

Данная работа посвящена описанию простого эвристического метода генерации вещественных тестовых матриц с заданным числом обусловленности для обоснованного практического выбора методов решения задач линейной алгебры.

Ключевые слова: системы линейных алгебраических уравнений, число обусловленности, спектр матрицы, тестовые матрицы.

1. Введение

Арсенал методов решения типовых задач линейной алгебры с очень большими и/или плохо обусловленными системами линейных алгебраических уравнений достаточно обширен и ставит вопрос обоснованного и вычислительно экономного выбора метода в каждой конкретной ситуации. При этом опираются не только на иногда доступные теоретические результаты, но и стараются принимать во внимание особенности задач и погрешности численной арифметики. Анализ влияния последних исключительно сложен [1], что вынуждает на практике выяснять точность работы конкретных реализаций методов на определённых легко вычисляемых классах тестовых матриц (Вандермонда, Коши, случайных). Однако, тестирование на столь узком круге матриц часто не позволяет выяснить тонкости применения методов в силу отсутствия механизмов гибкого задания свойств тестовой матрицы. Синтез матриц с заданным спектром достаточно вычислительно затратен, поэтому возникает потребность в несложных, но гибких методах получения тестовых матриц. Наибольшее внимание в данном вопросе уделяется числу обусловленности. Так, например, У. Чени и Д. Кинкейд утверждают [2], что при равном 10^k числе обусловленности можно потерять не менее k десятичных цифр точности,

[1] *Парфенов Денис Васильевич* — доцент кафедры Высшей математики Института кибернетики, МИРЭА - Российский технологический университет, к.т.н., доцент, e-mail: promasterden@yandex.ru.

Parfenov Denis Vasilevich — associate professor, MIREA – Russian Technological University, Institute of Cybernetics, Chair of Higher Mathematics.

[2] *Чешкова Анна Михайловна* — студент магистратуры кафедры Высшей математики Института кибернетики, МИРЭА - Российский технологический университет, e-mail: cheshkoann@gmail.com.

Cheshkova Anna Mikhaylovna — master student, MIREA – Russian Technological University, Institute of Cybernetics, Chair of Higher Mathematics.

даже не учитывая эффекты использования приближённой компьютерной арифметики.

2. Эвристический метод генерации матриц с заданным числом обусловленности

Рассмотрим два типа квадратных матриц. Первый – идеально хорошо обусловленная единичная матрица, второй – идеально плохо обусловленная матрица, заполненная единицами. На сопоставлении их конструкции основана идея предлагаемого метода, целью которого является генерация матриц с заданным "промежуточным" поведением. Диагональ матрицы всегда заполняется единицами, как в обоих рассмотренных типах матриц с "предельными" свойствами обусловленности. Величина элемента матрицы задаётся как функция удаления этого элемента вдоль строки от главной диагонали.

Входными параметрами метода генерации квадратной тестовой матрицы являются её размер N и вещественный параметр качества матрицы $-N+2 \le \delta < \infty$. При $\delta = -N+2$ получается единичная матрица, а при $\delta \to \infty$ растёт степень вырождения матрицы. Здесь и далее предполагается, что элементы матрицы нумеруются с нуля.

Сначала строится первая строка $a_{0\,0}, \ldots, a_{0\,N-1}$ генерируемой тестовой квадратной матрицы $A = \{a_{i\,j}\}_{i,j=0}^{N-1}$. Значения её элементов вычисляются по следующему правилу:

$$a_{0\,j} = \begin{cases} 1 - \frac{j}{N-1+\delta}, & \text{если } \frac{j}{N-1+\delta} \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} , j = 0, \ldots, N-1.$$

Эта функция определена для неотрицательных целых индексов столбцов $j \le N-1$, неотрицательна и всегда проходит через точку $(0,1)$. Её общий вид при разных значениях параметра δ представлен на Рис. 1.

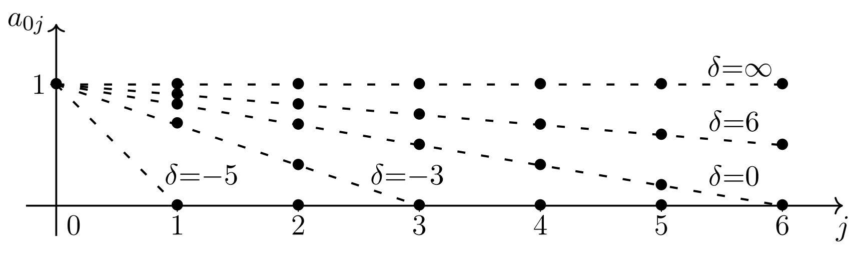

Рисунок 1. Графики зависимостей коэффициентов первой строки матрицы A от индекса при разных δ для $N = 7$.

Последующие строки A получаются циклической перестановкой элементов первой строки: $a_{i\,j} = a_{(i-1)\mathrm{mod}N\ (j-1)\mathrm{mod}N}$. Например, при $N = 2, 3, 4$ структура тестовых матриц такова:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{0\,1} \\ a_{0\,1} & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & a_{0\,1} & a_{0\,2} \\ a_{0\,2} & 1 & a_{0\,1} \\ a_{0\,1} & a_{0\,2} & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & a_{0\,1} & a_{0\,2} & a_{0\,3} \\ a_{0\,3} & 1 & a_{0\,1} & a_{0\,2} \\ a_{0\,2} & a_{0\,3} & 1 & a_{0\,1} \\ a_{0\,1} & a_{0\,2} & a_{0\,3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Исследование полученных матриц

Авторам пока не удалось исследовать связь числа обусловленности со значениями δ и N аналитически. Представленные на Рис. 2 экспериментальные результаты получены с помощью стандартного программного пакета [3] и наводят на мысль о наличии достаточно простой зависимости. На графиках не изображено значение числа обусловленности при $\delta = \infty$, равное ∞.

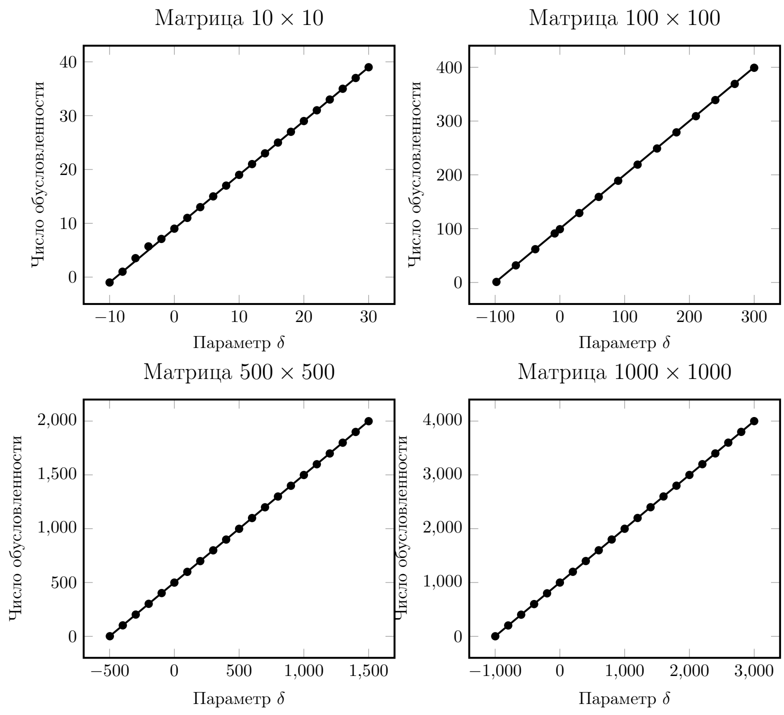

Рисунок 2. Графики зависимостей числа обусловленности матрицы от параметра δ при разных N.

Предложен новый, чрезвычайно простой способ синтеза диагонально доминирующих тёплицевых тестовых матриц с неотрицательными вещественными элементами и желаемым значением числа обусловленности напрямую, а не подбором. Он годится также для построения прямоугольных матриц, соответствующих недоопределённым и переопределённым системам линейных алгебраических уравнений. Исходя из проведённых численных экспериментов, можно сформулировать гипотезу о линейной связи параметра δ с числом обусловленности, но она пока не доказана, и имеет смысл в каждом конкретном случае убеждаться, что это так.

Список литературы

[1] N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, second edition*, SIAM, Philadelphia, United States, 2002, 680 pp.

[2] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Thomson Broks/Cole, Pacific Grove, United States, 2008, 766 pp.

[3] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, L.S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen, *LAPACK Users' guide (third ed.)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center Philadelphia, United States, 1987, 412 pp.

Generation of Test Matrices with Given Condition Numbers

Parfenov D. V., Cheshkova A. M.

A new low-complexity heuristic method for generation of real-valued test matrices with required condition number is proposed.

It makes practical selection of methods for solving linear algebra problems easier.

Keywords: systems of linear equations, condition number, matrix spectrum, test matrices.

References

[1] N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, second edition*, SIAM, Philadelphia, United States, 2002, 680 pp.

[2] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Thomson Broks/Cole, Pacific Grove, United States, 2008, 766 pp.

[3] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, L.S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen, *LAPACK Users' guide (third ed.)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center Philadelphia, United States, 1987, 412 pp.