Исследование пограничных случаев реализации клеточным автоматом двунаправленного движения на луче

Е. В. Кузнецова[1]

В работе рассматривается реализация клеточным автоматом различных законов движения точки на бесконечном экране. Найдены алгоритмы построения изображений для трёх классов законов движения. Показано, что для моделирования этих законов движения точки на луче минимальное число состояний клеточного автомата равно 4.

Ключевые слова: клеточный автомат, число состояний, бесконечный экран, двунаправленное движение, конструирование изображений.

Пусть S — некоторое множество слов в алфавите $\{f, s, b\}$, в префиксе любой длины которых количество символов b не превышает количества символов f. Элементы множества S будем называть *законами движения*. Символ f подразумевает движение на одну клетку вправо, s — остаться на месте, b — на одну клетку влево.

Экраном будем называть следующую конструкцию.

Пусть имеется бесконечная в правую сторону полоса шириной в одну клетку. В каждую клетку полосы поместим по одному экземпляру одного и того же конечного автомата. К входам этого автомата присоединим выходы автоматов, стоящих в двух соседних с ним клетках, у автомата имеется три входа: *левый*, *правый* и состояние автомата в предыдущий момент времени. Выходом автомата в заданный момент времени является его состояние в этот момент времени. Для автомата, стоящего в самой левой клетке полосы левый вход не определён. Будем называть его *управляющим входом* и подавать на него *управляющие сигналы*.

Значения состояний клеточного автомата, при которых считается, что клетка, находящаяся в данном состоянии, видима (чёрная) будем называть *метками*.

Будем говорить, что *на экране реализуется движение по закону* $A \in S$, если выполняются следующие условия:

---

[1] *Кузнецова Екатерина Викторовна* — младший научный сотрудник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: kuz.net.sova@mail.ru.

Kuznetsova Ekaterina Viktorovna — Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

1) в некоторый момент времени в самой левой клетке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток);

2) изменение позиции метки на экране в i-й момент от начала движения соответствует i-й букве в слове или сверхслове A, а именно, если $A(i) = s$, то в $(i+1)$-й момент метка остается в той же клетке, где была в текущий момент, если $A(i) = f$, то в $(i+1)$-й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, если $A(i) = b$, то в $(i+1)$-й момент метка сдвинется на одну клетку влево;

3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Экран будем называть *универсальным* для множества законов движения S, если для любого закона движения из S существует такая последовательность управляющих сигналов, что на экране формируется такое изображение, что метка движется по закону S.

В начальный момент все элементарные автоматы экрана находятся в состоянии ноль. Затем начинаем подавать на управляющий вход сигналы. В какой-то момент в самой левой клетке экрана появится метка.

Под появлением точки на экране будем подразумевать переключение клетки автомата, соответствующей самой левой клетке экрана, в состояние, соответствующее состоянию метки.

Законы движения из S, обладающие тем свойством, что перед символом f в них всегда стоит символ s, то есть движение вперёд возможно со скоростью, не большей, чем $1/2$, можно реализовать клеточным автоматом с пятью состояниями, причем оценка на количество состояний не улучшаема.

Ранее Титовой Е. Е. был получен аналогичный результат для законов движения без движения назад.

Теорема 1 (Титова [1])**.** *Пусть $F = ((sf) \vee (s))^{\infty}$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s\}$. Существует универсальный экран для множества законов движения F, имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для F не существует.*

Теорема 2 (доказана в работе [2]) по сути является расширением результата Титовой.

Теорема 2. *Пусть $S^1 = ((sf) \vee (s) \vee (b))^{\infty}$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S^1 любой длины количество символов b не превышает количества символов f. Существует универсальный экран для множества* *законов движения S^1, имеющий 5 состояний клеточного автомата. Универсального экрана с 4 состояниями для S^1 не существует.*

С одной стороны в работе [1] доказано, что трёх состояний клеточного автомата не хватит даже для реализации классов законов движения, в которых нет движения назад. С другой стороны с пятью состояниями можно реализовать S^1. Остаётся вопрос, какие законы можно реализовать экранами с четырьмя состояниями. Оказывается, что можно реализовать законы движения с меньшими скоростями движения вперёд или назад — подмножества S^1.

Теорема 3 (**Законы движения со скоростью движения вперёд 1/4 и скоростью движения назад 1/2**). *Пусть S^2 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssfs, s, sb\}$ таких, что в префиксе S^2 любой длины количество символов b не превышает количества символов f. Существует универсальный экран для множества законов движения S^2, имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для S^2 не существует.*

Теорема 4 (**Законы движения со скоростью движения вперёд 1/4 и скоростью движения назад 1**). *Пусть S^3 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sfss, s, b\}$ и начинающихся с элемента s таких, что в префиксе S^3 любой длины количество символов b не превышает количества символов f. Существует универсальный экран для множества законов движения S^3, имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для S^3 не существует.*

Теорема 5 (**Законы движения со скоростью движения вперёд 1/3, скоростью движения назад 1 и чётным количеством остановок**). *Пусть S^4 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, ss, b\}$ таких, что в префиксе S^4 любой длины количество символов b не превышает количества символов f. Существует универсальный экран для множества законов движения S^4, имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для S^4 не существует.*

Гипотеза. *Пусть S^5 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, s, b\}$ таких, что в префиксе S^5 любой длины количество символов b не превышает количества символов f. Не существует универсального экрана с 4 состояниями клеточного автомата для множества законов движения S^5.*

Если бы удалось доказать эту гипотезу, то был бы полностью закрыт вопрос о том, какие законы движения можно реализовать экранами с четырьмя состояниями.

Автор выражает благодарность научному руководителю, д. ф.-м. н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

[1] Титова Е.Е., "Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами", *Интеллектуальные системы*, **18**:1 (2014), 153–180.

[2] Кузнецова Е.В., "Число состояний универсального автомата бесконечного экрана, реализующего двунаправленное движение на луче", *Интеллектуальные системы*, **25**:1 (2021), 127–148.

Investigation of edge cases of a cellular automaton implementation of bidirectional motion on a ray

Kuznetsova E.V.

The paper considers the implementation of various motion laws of a point on an infinite screen by a cellular automaton. Algorithms for constructing images for three classes of motion laws are found. It is shown that for modeling these motion laws of a point on a ray, the minimum number of a cellular automaton states is 4.

Keywords: cellular automaton, number of states, infinite screen, bidirectional motion, image construction.

References

[1] Titova E.E., "Konstruirovanie dvizhushchikhsya izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Moving images construction by cellular automata]", *Intelligent Systems*, **18**:1 (2014), 153–180 (in Russian).

[2] Kuznetsova E.V., "The number of states of a universal automaton of an infinite screen that implements bidirectional motion on a ray", *Intelligent Systems*, **25**:1 (2021), 127–148 (in Russian).