О разметках графов абелевых автоматов

Р. А. Ищенко[1]

Автор исследует вопрос количества возможных разметок ребер сильно-связного ориентированного графа, чтобы образованная диаграмма Мура соответствовала некоторому абелевому автомату. Доказано, что в случае алфавита из двух элементов такая разметка единственна (кроме крайнего случая) и приведен алгоритм такого восстановления. В случае алфавита из большего числа элементов показано, что максимальное количество разметок экспоненциально зависит от количества вершин.

Ключевые слова: абелевые автоматы, диаграмма Мура, граф переходов, разметка графа автомата, структура графа автомата.

1. Введение

Абелевы автоматы являются одним из основополагающих классов автоматов, изучавшихся в том числе в работах [1, 2, 3, 4]. Если мы сотрем отметки на диаграмме Мура автомата (предположим, информация потеряна), то получим ориентированный граф. В данной работе приводится критерий того, что ориентированный граф может быть доопределен (размечен) до графа некоторого абелева автомата (восстановление информации), в таком случае граф называется *абелевым*, а разметка — *а-разметкой*. Рассматривается вопрос количества а-разметок в зависимости от структуры графа и показано, что в общем случае максимальное количество а-разметок экспоненциально зависит от количества вершин, однако существует широкий класс абелевых графов с единственной а-разметкой. Отдельно рассматриваются автоматы с двумя входными символами, обладающие рядом интересных свойств, например в [5] было показано, что они вместе с булевыми функциями образуют полную систему относительно суперпозиции. В данной работе показано, что в случае двух входных символов существует алгоритм разметки графа до абелевого автомата за время $O(n)$, где n - число вершин графа.

Автор выражает благодарность профессору Д.Н. Бабину за постановку задачи и помощь в работе.

[1] *Ищенко Роман Андреевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ishchenko.roman1@gmail.com.

Ishchenko Roman Andreevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Пусть $V = (A, Q, \varphi)$ — конечный автомат без выходов. Автомат V называется *абелевым*, если для любых символов α, $\beta \in A$ и состояния $q \in Q$ выполняется $\varphi(q, \alpha\beta) = \varphi(q, \beta\alpha)$. *Графом автомата* $V = (A, Q, \varphi)$ называется размеченный ориентированный граф $G = (Q, W, f)$, вершины которого соответствуют состояниям автомата, при этом $e = (q, p) \in W$, $f(e) = \alpha \Leftrightarrow \varphi(q, \alpha) = p$, где $f : W \to A, \alpha \in A$. Ориентированный граф $G = (Q, W)$ называется *автоматным*, если существует такая функция $f : W \to A$, что размеченный граф (Q, W, f) является графом некоторого автомата, в таком случае функция f называется *разметкой* автоматного графа G в алфавите A, а количество символов в алфавите (исходящая степень вершин) называется *степенью графа* G. Автоматный граф $G = (Q, W)$, у которого существует разметка f, что $G = (Q, W, f)$ — граф некоторого абелевого автомата $V_f = (A, Q, \varphi_f)$, называется *абелевым графом*, а разметка f — *а-разметкой*. Далее иногда мы будем подразумевать под разметкой f соответствующий ей автомат V_f.

Граф G с разметкой f раскладывается в сумму подграфов $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_f(\alpha)$, где $G_f(\alpha) = (Q, W(\alpha), f(\alpha))$, где $W(\alpha) = \{e \in W | f(e) = \alpha\}$ и $f(\alpha) = f|W(\alpha)$ (сужение функции f на множество $W(\alpha)$). Как и в случае групповых автоматов, которые изучались в [6], будем различать разметки с точностью до замены букв и/или кратных ребер: разметки f_1 и f_2 графа G в алфавите A называются *различными*, если множество $\{G_{f_1}(\alpha) | \alpha \in A\} \neq \{G_{f_2}(\alpha) | \alpha \in A\}$. Если понятно, о какой разметке f идет речь, иногда мы будем писать $G(\alpha)$ вместо $G_f(\alpha)$.

Граф называется *сильно-связным*, если существует ориентированный путь из любой вершины в любую другую. Автомат называется *сильно-связным*, если его граф сильно-связный. В дальнейшем в статье мы будем рассматривать только сильно-связные графы и автоматы.

Определим граф $G(n, m) = (V, W)$ как:

- $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$, где $k = n/m$ и $|V_i| = m$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$
- $W = \{(v, u) | v \in V_i$ и $u \in V_{i'}$, где $i' = i + 1$, если $i < k$ и $i' = 1$, если $i = k\}$

Несложно показать, что граф $G(n, m)$ является абелевым и однозначно определенным с точностью до изоморфизма.

Далее сформулируем основные результаты данной работы:

Теорема 1. *Абелевый граф $G(n, m)$ имеет не менее $(m!)^{n/m-1}$ различных а-разметок.*

Теорема 2. *Пусть G — сильно-связный абелевый граф G с n вершинами степени 2, не равный $G(n,2)$, тогда G имеет единственную а-разметку.*

Теорема 3. *Пусть G — сильно-связный автоматный граф степени 2, тогда существует алгоритм, который находит а-разметку или определяет, что такой разметки не существует, за время $O(n)$.*

Список литературы

[1] Fleck A.C., "Isomorphism Groups of Automata", *Journal of the ACM*, **9**:4 (1962), 469–476.

[2] Charles A. Trauth, "Group-Type Automata", *Journal of the ACM*, **13**:1 (1966), 170–175.

[3] Yukio S., "On the structure of abelian automata", *Journal of Computer and System Sciences*, **13**:2 (1976), 143–152.

[4] Малыгин В.И., "О некоторых пространствах, связанных с композициями автоматов", *Вестн. Моск. ун-та Сер. 1, Математика, Механика*, 1988, № 4, 88–90.

[5] Babin D.N., "On completeness of the binary bounded determined functions with respect to superposition", *Discrete Mathematics and Applications*, **1**:4 (1991), 423–431.

[6] Ищенко Р.А., "Оценка количества разметок графов групповых автоматов", *Интеллектуальные системы*, **24**:4 (2020), 75–86.

On the labelings of abelian automata graphs

Ishchenko R.A.

The author investigates the number of possible labelings of the edges of a strongly connected directed graph so that the resulting Moore diagram corresponds to some abelian automaton. It is proved that in the case of an alphabet of two elements, such a labeling is unique (except for the extreme case), and the algorithm for such a labeling is given. In the case of an alphabet with a larger number of elements the exponential dependence of the maximum number of labelings on the number of vertices is proved.

Keywords: abelian automata, automation diagramm, transition graph, labelings of automation graph, structure of automation graph.

References

[1] Fleck A.C., "Isomorphism Groups of Automata", *Journal of the ACM*, **9**:4 (1962), 469–476.

[2] Charles A. Trauth, "Group-Type Automata", *Journal of the ACM*, **13**:1 (1966), 170–175.

[3] Yukio S., "On the structure of abelian automata", *Journal of Computer and System Sciences*, **13**:2 (1976), 143–152.

[4] Малыгин В.И., "О некоторых пространствах, связанных с композициями автоматов", *Вестн. Моск. ун-та Сер. 1, Математика, Механика*, 1988, № 4, 88–90.

[5] Babin D.N., "On completeness of the binary bounded determined functions with respect to superposition", *Discrete Mathematics and Applications*, **1**:4 (1991), 423–431.

[6] Ishchenko R.A., "The number of labelings of group automata graphs (", *Intelligent systems*, **24**:4 (2020), 75–86 (In Russian)).