Приведение гипервыходных систем к форме с относительным порядком

В. В. Фомичев[1] , А. И. Роговский[2]

Рассматривается понятие относительного порядка для гипервыходных систем (то есть систем, у которых размерность выхода больше чем размерность входа). Его условия, как и в случае квадратных систем (для которых размерности входа и выхода совпадают), являются ограничительными, и не являются инвариантными по отношению к невырожденной замене выходов.

Ставится задача приведения гипервыходной системы к форме, в которой условия относительного порядка выполняются. Для этого, по аналогии со случаем квадратных систем, вводятся обобщения относительного порядка с менее ограничительными условиями. С их помощью удается решить поставленную задачу.

Ключевые слова: относительный порядок, гипервыходные системы.

1. Введение

Рассматривается линейная стационарная гипервыходная система:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ обозначает фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — ее вход, а $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход; A, B, C — постоянные матрицы подходящих размеров; $t > 0$. Поскольку система однозначно определяется своими матрицами, далее будем обозначать ее $\{A,\ B, C\}$. Если не сказано иное, далее мы будем предполагать, что $l > m$, то есть система является *гипервыходной.*

Важным понятием для динамических систем с входом и выходом является понятие относительного порядка. Оно используется при решении многих задач теории управления, таких как задача наблюдения [1], обращения [2], стабилизации [3] и других [4].

[1] *Фомичев Василий Владимирович* — профессор каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ, e-mail: fomichev@cs.msu.ru.

Fomichev Vasily Vladimirovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamical Systems and Control Processes.

[2] *Роговский Александр Игоревич* — ассистент каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ, e-mail: alexander.rogovskiy@gmail.com.

Rogovskiy Alexander Igorevich — assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamical Systems and Control Processes.

Относительный порядок изначально вводился для *скалярных* систем (то есть систем, для которых $m = l = 1$), в этом случае он может быть определен, например, как минимальный порядок производной выхода, явно зависящей от управления. Затем это определение было распространено на случай векторных квадратных систем (то есть систем, для которых $m = l > 1$) [2, 220]. Однако, в этом случае условия относительного порядка уже являются ограничительными и не всегда выполняются. Более того, для линейных систем эти условия не являются инвариантными по отношению к замене выходов. Это позволяет в некоторых случаях добиться за счет замены выходов выполнения условия относительного порядка [5]. Наконец, в работе [6] определение относительного порядка было распространено на случай гипервыходных линейных систем. Условия этого определения еще более ограничительны, однако, как и ранее, не являются инвариантными по отношению к замене выходов. В настоящей работы мы рассмотрим задачу приведения гипервыходной системы к форме с относительным порядком, то есть задачу поиска такой замены выходов, что для системы $\{A,\ B,\ C\}$ условия относительного порядка (в смысле [6]) выполняются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 22-21-00288).

2. Основные понятия и формулировка результата

Введем основные определения.

Определение 1. *Вектор* $r \in \mathbb{N}^l$ *называется вектором* относительного порядка *гипервыходной системы* $\{A,\ B,\ C\}$, *если выполняются следующие условия:*

1) $C_i A^{r_i - 1} B \neq 0$, *и, если* $r_i > 1$, *то* $C_i A^{j-1} B = 0,\ \ j = \overline{1, r_i - 1}$;

2) *строки* $\{C_i A^{r_i - 1} B\}_{i=1}^m$ *линейно независимы;*

3) *справедливы неравенства* $r_i \leqslant r_{i+1},\ \ i = \overline{1, l-1}$.

В [6] показано, что при выполнении условий Определения 1 система приводится к канонической форме — аналогу нормальной формы для квадратных систем — удобной для решения задач наблюдения и обращения.

Наша задача — выяснить, при каких условиях для гипервыходной системы $\{A,\ B,\ C\}$, не имеющей относительного порядка, найдется такая невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, что для системы $\{A,\ B,\ TC\}$ условия относительного порядка выполняются (умножение матрицы C на матрицу T соответствует замене выходов). Поскольку условия относительного порядка являются ограничительными, ослабим их:

Определение 2. *Вектор* $r \in \mathbb{N}^l$ *называется вектором* неполного относительного порядка (НОП) *гипервыходной системы* $\{A,\ B,\ C\}$, *если выполняется первое требование определения 1.*

Определение 3. *Вектор* $r \in \mathbb{N}^l$ *называется вектором* главного неполного относительного порядка (ГНОП) *гипервыходной системы* $\{A,\ B,\ C\}$, *если* r *— вектор НОП, и для любых различных индексов* $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_p$, *таких что* $r_{i_1} = \ldots = r_{i_p}$, *строки* $\{C_{i_j} A^{r_{i_j}-1} B\}_{j=1}^{p}$ *линейно независимы.*

Введем класс систем, для которых целесообразно рассматривать замены выходов:

Определение 4. *Система* $\{A,\ B,\ C\}$ *называется* слабо приводимой, *если при любой невырожденной матрице* T *для системы* $\{A,\ B,\ TC\}$ *определен вектор НОП.*

Основные результаты работы сформулированы ниже:

Лемма 1. *Для любой слабо приводимой системы* $\{A,\ B,\ C\}$ *найдется такая невырожденная матрица* $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, *что для системы* $\{A,\ B,\ TC\}$ *определен вектор ГНОП.*

Теорема 1. *Пусть для системы* $\{A,\ B,\ C\}$ *определен вектор ГНОП. Пусть далее при любой матрице перестановок* $\tilde{T}$ *для системы* $\{A,\ B,\ \tilde{T}C\}$ *не выполняются условия относительного порядка. Тогда при любой невырожденной матрице* T *для системы* $\{A,\ B,\ TC\}$ *также не выполняются условия относительного порядка.*

Мы получили следующий алгоритм решения поставленной задачи:

1) привести систему к форме с ГНОП (при доказательстве леммы 1 указан конструктивный алгоритм для построения такого преобразования);

2) проверить, выполняются ли для преобразованной системы условия определения 1 (возможно, после перестановки выходов); если да, система приведена к требуемому виду, если нет, задача не имеет решения.

Список литературы

[1] Trinh H., Fernando T., *Functional Observers for Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 2012, 220 pp.

[2] Isidiri A., *Nonlinear Control Systems*, Springer, London, 1995, 549 pp.

[3] Wang L., Isidori A., Su H., "Global Stabilization of a Class of Invertible MIMO Nonlinear Systems сверхслов", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **60**:3 (2015), 616–631

[4] Isidori A., "The zero dynamics of a nonlinear system: From The Origin To the latest progresses of a long successful story сверхслов", *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, 2011, 18–25

[5] Kraev A.V., Rogovskii A.I., Fomichev V.V., "On a Generalization of Relative Degree", *Differential Equations*, **50**:8 (2014), 1122–1127

[6] Fomichev V.V., Kraev A.V., Tevdoradze S.Z., "Synthesizing Asymptotic Observers for Hyperoutput Systems with Uncertainty upon Transfer Matrix Degeneracy", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **44**:1 (2020), 44–52

Reduction of hyperoutput systems to a form with relative degree

Fomichev V. V., Rogovskiy A. I.

We consider a notion of relative degree for hyperoutput systems (i.e. the systems that has more outputs than inputs). Relative degree conditions are restrictive (the same is true for a square systems — the systems that have the same number of inputs and outputs), furthermore, these conditions are not invariant under output change.

We consider a problem of reducing a hyperoutput system to a form with relative degree. To solve the problem we indroduce generalizations of relative degree, similar to the square-system's case. Using these generalization we solve the problem.

Keywords: relative degree, hyperoutput systems.

References

[1] Trinh H., Fernando T., *Functional Observers for Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 2012, 220 pp.

[2] Isidiri A., *Nonlinear Control Systems*, Springer, London, 1995, 549 pp.

[3] Wang L., Isidori A., Su H., "Global Stabilization of a Class of Invertible MIMO Nonlinear Systems сверхслов", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **60**:3 (2015), 616–631

[4] Isidori A., "The zero dynamics of a nonlinear system: From The Origin To the latest progresses of a long successful story сверхслов", *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, 2011, 18–25

[5] Kraev A.V., Rogovskii A.I., Fomichev V.V., "On a Generalization of Relative Degree", *Differential Equations*, **50**:8 (2014), 1122–1127

[6] Fomichev V.V., Kraev A.V., Tevdoradze S.Z., "Synthesizing Asymptotic Observers for Hyperoutput Systems with Uncertainty upon Transfer Matrix Degeneracy", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **44**:1 (2020), 44–52