Задача распределения полочного пространства с учетом вариантов положения товаров

Н. М. Адрианов[1] , Е. С. Черняховская[2]

Мы формулируем задачу распределения полочного пространства с учетом разных вариантов размещения товаров (возможность боковой ориентации, каппинги и нестинги). Представлен способ линеаризации нелинейных ограничений, возникающих в такой постановке. Данная методика позволяет найти оптимальное решение задачи, в том числе и для больших объемов входных данных.

Распределение полочного пространства (РПП, shelf space allocation, SSA) является одним из важнейших процессов принятия решений в розничной торговой сети. Комплексные подходы к распределению полочного пространства с одной стороны направлены на компетентное использование торговой площади и максимизации продаж, с другой – на привлечение внимания покупателей и увеличение количества незапланированных покупок ([1]). Правильное размещение товаров на полках влияет на продажи ([2]).

Фейсинги, каппинги и нестинги. *Фейсингом* называется видимая для покупателей единица товара на полке. Задача РПП формулируется так: дан набор товаров, которые необходимо разместить на определенном количестве полок торгового оборудования с целью получения максимальной прибыли. Стандартные ограничения задачи: длина полки, количество фейсингов, целочисленность фейсингов, количество полок для расположения товара, запас товара ([3], [4]).

В настоящей работе мы добавляем в модель возможность боковой ориентации некоторых товаров, а также следующие опции размещения: *каппинги* – некоторые товары разрешается класть сверху в горизонтальном положении, *нестинги* – некоторые товары допускается вкладывать в аналогичные, см. рис. 1.

[1] *Адрианов Николай Михайлович* — МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, старший научный сотрудник, e-mail: nadrianov@gmail.com.

Adrianov Nikolai — Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, senior researcher.

[2] *Черняховская Екатерина Сергеевна* — Вроцлавский университет экономики и бизнеса, ассистент, e-mail: kateryna.czerniachowska@ue.wroc.pl.

Czerniachowska Kateryna — Wroclaw University of Economics and Business, assistant.

Мы используем кальку англоязычных терминов (facings, cappings, nestings), поскольку именно в таком виде они прочно вошли в профессиональную лексику, а их русскоязычные аналоги отсутствуют.

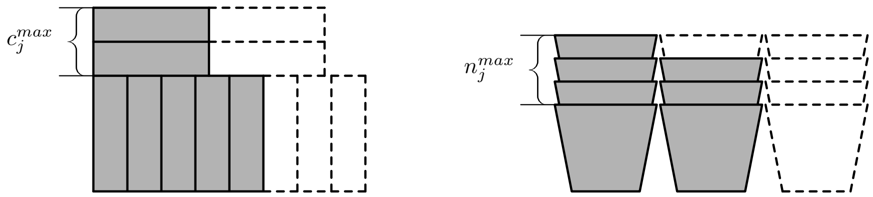

Рис. 1. Каппинги и нестинги

Формулировка задачи. Пусть S – количество полок, и для каждой полки заданы: ширина s_i^w, глубина s_i^d, высота s_i^h. Ориентацию товара будем задавать индексом r: $r = 0$ – прямая, $r = 1$ – боковая. Пусть P – количество товаров, и для каждого товара заданы: p_{jr}^w – ширина в положении r, высота p_j^h, высота нестинга p_j^n, запас товара p_j^s, прибыль (маржа) p_j^u, и p_j^o – признак возможности боковой ориентации (если $p_j^o = 0$, то поворачивать товар запрещено).

Пусть f_j^{min}, f_j^{max}, c_j^{max}, n_j^{max} – минимальное количество фейсингов, максимальное количество фейсингов, каппингов и нестингов для товара j соответственно. Высота полки накладывает дополнительное ограничение, поэтому количество каппинг-слоев товара j в положении r на полке i ограничено величиной

$$c_{ijr}^{max} = \min\left(c_j^{max}, (s_i^h - p_j^h)/p_{jr}^w\right),$$

а количество нестингов товара j – величиной

$$n_{ij}^{max} = \min\left(n_j^{max}, (s_i^h - p_j^h)/p_j^n\right).$$

Переменные: $\alpha_j \in \{0, 1\}$ – положение товара, x_{ijr}, y_{ijr}, $z_{ijr} \in \mathbb{Z}_+$ – количество фейсингов, каппингов и нестингов, а $\bar{y}_{ijr}$ – количество стопок каппингов для товара j на полке i в положении r.

Задачу оптимизации мы формулируем в следующем виде.

$$\sum_{j=1}^{P} \sum_{i=1}^{S} \sum_{r=0}^{1} p_j^u (x_{ijr} + y_{ijr} + z_{ijr}) \to \max$$

при следующих ограничениях:

(1)	$\sum_{j=1}^{P}\sum_{r=0}^{1} p^w_{jr} x_{ijr} \le s^w_i$	(ширина полки)
(2a)	$x_{ij0} = 0$ при условии $p^w_{j1} > s^d_i$	(глубина полки)
(2b)	$x_{ij1} = 0$ при условии $p^w_{j0} > s^d_i$	
(3)	$\sum_{i=1}^{S}\sum_{r=0}^{1}(x_{ijr} + y_{ijr} + z_{ijr}) \le p^s_j$	(количество товара)
(4)	$f^{min}_j \le \sum_{i=1}^{S}\sum_{r=0}^{1} x_{ijr} \le f^{max}_j$	(фейсинги)
(5a)	$p^h_j \bar{y}_{ijr} \le p^w_{jr} x_{ijr}$	(каппинги)
(5b)	$y_{ijr} \le c^{max}_{ijr} \bar{y}_{ijr}$	
(6)	$z_{ijr} \le n^{max}_{ij} x_{ijr}$	(нестинги)
(7)	$\alpha_j = 0$ при условии $p^o_j = 0$	(запрет поворота)
(8)	$\alpha_j x_{ij0} = 0$	(ориентация)
(9)	$(1-\alpha_j) x_{ij1} = 0$	

Ограничения на переменные y_{ijr}, z_{ijr}, аналогичные условиям (8) и (9), выписывать не требуется, поскольку они будут следовать из условий (5a), (5b), (6), (8) и (9).

Линеаризация. Все ограничения в нашей модели линейные, кроме (8) и (9). Для их линеаризации мы используем технику, предложенную Джорджем Данцигом.

Лемма 1 (Данциг, [6])**.** *Пусть α – бинарная переменная, x и y – вещественные или целочисленные переменные с ограничением $|x| \le M$, где $M > 0$ – известная константа или параметр задачи. Тогда нелинейное условие $y = \alpha x$ эквивалентно следующим линейным условиям:*

$$x - (1-\alpha)M \le y \le x + (1-\alpha)M$$

$$-\alpha M \le y \le \alpha M$$

Доказательство. Прямолинейная проверка случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. □

Следствие 1. *Пусть α – бинарная переменная, x – вещественная или целочисленная переменная с ограничением $0 \le x \le M$, где $M > 0$ – известная константа или параметр задачи. Тогда нелинейное условие $\alpha x = 0$ эквивалентно линейному условию $x \le (1-\alpha)M$.*

Следствие 2. *Ограничения (8) и (9) с учетом (4) можно заменить на*

$$(8') \qquad x_{ij0} \leq (1-\alpha_j) f_j^{max}$$

$$(9') \qquad x_{ij1} \leq \alpha_j f_j^{max}$$

Заключение. Мы свели задачу к линейной, для которой существуют мощные решатели, как коммерческие (CPLEX, Gurobi), так и бесплатные (Coin-Or). Эксперименты показывают, что CPLEX легко находит оптимальное решение задачи в линейной формулировке и не может справиться с аналогичной нелинейной моделью при тех же параметрах.

Сходство с задачей о рюкзаке подсказывает, что стоит попробовать применить в задаче РПП методы, успешно применяемые в задаче о рюкзаке, в частности branch-and-cut, который показывает эффективность выше, чем методы, основанные на линейном программировании. Это представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

Shelf space allocation problem with product position options

Adrianov N., Czerniachowska K.

We formulate the problem of shelf space allocation with various product position options (side orientation, cappings and nestings). A method for linearizing nonlinear constraints arising in this model is presented. This technique allows finding the optimal solution to the problem, including the large instances of input data.

References

[1] Bai R., Kendall G., "An investigation of automated planograms using a simulated annealing based hyper-heuristic.", *in: Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers, Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, **32** (2005), 87–108.

[2] Eisend M., "Shelf space elasticity: A meta-analysis", *Journal of Retailing*, **90**:2 (2014), 168–181.

[3] Yang M. H., "Efficient algorithm to allocate shelf space", *European Journal of Operational Research*, **131**:1 (2001), 107–118.

[4] Bai R., van Woensel T., Kendall G., Burke E. K., "A new model and a hyper-heuristic approach for two-dimensional shelf space allocation", *4OR*, **11**:1, 31–55.

[5] Bianchi-Aguiar T., Silva E., Guimarães L., Carravilla M. A., Oliveira J. F., "Allocating products on shelves under merchandising rules: Multi-level product families with display directions", *Omega*, **76** (2018), 47–62.

[6] Dantzig G.B., "On the significance of solving linear programming problems with some integer variables", *Econometrica*, **28**:1 (1960), 30–44.