

Тестирование неповторных функций в элементарном базисе, расширенном всеми поляризуемыми слабоповторными функциями

А. А. Вороненко¹

Д. В. Кафтан²

В работе доказано, что в базисе, состоящем из элементарного и всех поляризуемых слабоповторных функций, функция Шеннона для длины теста относительно неповторной альтернативы не превышает $3n - 2$.

Ключевые слова: неповторная функция, проверяющее тестирование, слабоповторные функции.

В статье без определения используются базовые понятия дискретной математики (см., например, [1]) и пионерской работы [2]. В работе [2] был введен аппарат канонических деревьев — однозначное представление неповторных функций для задач тестирования.

Множество n -мерных булевых наборов T называется *тестом относительно неповторной альтернативы* [2] в базисе B для неповторной в том базисе функции $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящей от всех переменных, если для любой отличной от f неповторной в базисе B функции $h(x_1, \dots, x_n)$ существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in T$, такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

¹Вороненко Андрей Анатольевич — профессор кафедры математической кибернетики ВМК МГУ, д.ф.-м.н., e-mail: dmb@cs.msu.ru.

Voronenko Andrey Anatolievich — professor, DR, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics

²Кафтан Дарья Владимировна — инженер 1 категории лаборатории дискретных управляющих систем и их приложений ВМК МГУ, e-mail: blond.programmist@gmail.com.

Kaftan Daria Vladimirovna — first category engineer, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics

Слабоповторные функции с точностью до конгруэнтности и взятия отрицаний были описаны в работе [3]:

$$\begin{aligned} f_d^s &= x_1(\bar{x}_2 \vee x_3 x_4 \dots x_s) \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_s, & s \geq 3, \\ f_t^s &= x_1 x_2 \dots x_s \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_s, & s \geq 2, \\ f_m^s &= x_1(x_2 \vee \dots \vee x_s) \vee x_2 x_3 \dots x_s, & s \geq 3, \\ f_4 &= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_4, \\ f_5 &= x_1(x_2 \vee x_3 x_4) \vee x_5(x_2 x_3 \vee x_4). \end{aligned}$$

Функция Шеннона для длины теста относительно неповторной альтернативы в элементарном базисе, дополненном f_t^s , равна $\Theta(n^s)$ [4]. В работе [5] в теоремах 1 и 2 было доказано, что в любом базисе, получающемся из элементарного добавлением специальной функции, данная функция Шеннона растет линейно. При добавлении функции f_m^s она не превосходит $(s+2)n$. Для элементарного базиса в работе [6] была получена верхняя оценка длины функции Шеннона — $2n+1$.

Назовем для краткости *специальными* функции f_4, f_5 и f_m^s . Через B^+ обозначим базис, получаемый добавлением к конъюнкции и дизъюнкции всех специальных функций. Обозначим $B = B^+ \cup \{\neg\}$. Обозначим через $T(n)$ функцию Шеннона для длины теста относительно неповторной альтернативы в базисе B , а через $T^+(n)$ — для длины проверяющего теста в базисе B^+ .

Лемма 1. *Справедливо неравенство $T(n) \leq T^+(n) + 2n$.*

Доказательство. Задача тестирования относительно неповторной альтернативы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в базисе B сводится к проверяющему тестированию в базисе B^+ функции, получаемой из f заменой антимонотонных переменных на их отрицания. При этом требуется для каждой переменной добавить пару соседних по ней наборов, на которых функция принимает различные значения.

Лемма доказана. □

Каноническим деревом функции $f(x_1, \dots, x_n)$, неповторной в базисе B^+ , назовем [5] помеченное корневое дерево, построенное согласно следующим правилам.

- 1) Листья дерева помечены переменными x_1, \dots, x_n . Разные листья помечены разными переменными.
- 2) Внутренние вершины дерева соответствуют подформулам неповторной формулы и помечены функциями из множества $\{\vee, \&\}$ или специальной функцией.

- 3) Если специальная функция — f_4 , то над вершиной находятся четыре инцидентных ребра, пронумерованных $(1, 2, 3, 4)$. Канонические деревья, получаемые с помощью перестановки ребер $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ над вершинами, помеченными f_4 , считаются эквивалентными.
- 4) Если специальная функция — f_5 , то над вершиной находятся пять инцидентных ребер, пронумерованных $(1, 2, 3, 4, 5)$. Канонические деревья, полученные с помощью группы перестановок, порождаемых перестановками ребер $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ над вершинами, помеченными f_5 , считаются эквивалентными.
- 5) Если специальная функция — f_m^s , то над вершиной находятся s инцидентных ребер с выделенным при $s \geq 4$ первым ребром.
- 6) Над вершиной, помеченной \vee или $\&$, расположено не менее двух смежных вершин.
- 7) Вершины, помеченные функцией \vee ($\&$), не смежны с вершинами, помеченными функцией \vee ($\&$).

Каноническое дерево D реализует функцию f естественным образом. Единственность канонического дерева была обоснована в работах [5, 7].

В работе [5] были доказаны лемма 2 и леммы 4–6. Утверждения были доказаны для базисов, состоящих из конъюнкции, дизъюнкции и одной специальной функции. Дословным повторением этих доказательств с учетом двойственных случаев обосновываются леммы 2 и 3.

Лемма 2. Пусть неповторная в базисе B^+ функция $h(z_1, z_2, z_{k+2}, \dots, z_n)$ существенно зависит от $n - k + 1 \geq 2$ переменных ($k \geq 2$), и лист ее канонического дерева, который помечен переменной z_1 , смежен с вершиной u , помеченной конъюнкцией (дизъюнкцией) или специальной функцией, а лист, помеченный z_2 , лежит в каком-то другом поддереве над u . Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1 \vee \dots \vee x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ($h(x_1 \& \dots \& x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$). Пусть $h(z_1, z_2, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = z_1 \& z_2$ ($z_1 \vee z_2$). Тогда тест T' , содержащий наборы теста T функции $f|_{x_k=0}$ ($f|_{x_k=1}$) с добавленными компонентами $x_k = 0$ ($x_k = 1$) и наборами из строки 1 (строки 2) таблицы 1 является проверяющим тестом для функции f на множестве всех неповторных в B^+ функций, существенно зависящих от n переменных.

Лемма 3. Пусть дана специальная функция g размерности s и пусть неповторная в базисе B^+ функция $h(z_1, z_{s+1}, \dots, z_n)$ существенно зависит от $n - s + 1$ переменных, где $n > s$, и лист, который помечен переменной z_1 , входит в вершину u , помеченную дизъюнкцией (конъюнкцией) или любой специальной функцией.

Таблица 1. Подстановка $f|_{x_1=\alpha}$ для вершины v

№	Пометка v	α	Изменение дерева	Наборы для теста
1	$x_1 \vee \dots \vee x_k$	0	В D удаляется лист x_1 и при $k = 2$ вершина v заменяется на лист x_2	$f(1, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 0$ $f(1, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 1$
2	$x_1 \& \dots \& x_k$	1	В D удаляется лист x_1 и при $k = 2$ вершина v заменяется на лист x_2	$f(0, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 1$ $f(0, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 0$
3	f_4	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_3(x_2 \vee x_4)$	$f(1, 1, 0, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(1, 0, 1, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 0, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0$
4	f_4	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee x_3 x_4$	$f(0, 0, 1, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(0, 1, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 1, 1, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1$
5	f_5	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_5(x_2 \vee x_3 x_4)$	$f(1, 1, 0, 0, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(1, 0, 0, 1, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 0, 1, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 0, 1, 1, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1$
6	f_5	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee x_4(x_3 \vee x_5)$	$f(0, 1, 1, 1, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 1, 1, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(0, 1, 0, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 0, 0, 1, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1$
7	f_m^s	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \& \dots \& x_s$	$f(1, 0, 0, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 1, 0, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(1, 0, 1, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1,$ $\dots,$ $f(1, 0, \dots, 0, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1$
8	f_m^s	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee \dots \vee x_s$	$f(0, 1, 1, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(0, 0, 1, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 1, 0, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0,$ $0,$ $\dots,$ $f(0, 1, \dots, 1, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0$

Пусть функция f зависит от переменных x_1, \dots, x_n , и для f и h выполнены следующие равенства:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g(x_1, \dots, x_s), x_{s+1}, \dots, x_n),$$

$$h(z_1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = z_1.$$

Тогда тест T' , содержащий наборы теста T функции $f|_{x_1=0}$ ($f|_{x_1=1}$) с добавлением компоненты $x_1 = 0$ ($x_1 = 1$), и наборов из таблицы 1, является проверяющим тестом для функции f на множестве всех бесповторных в B^+ функций, существенно зависящих от n переменных.

Теорема 1. *Справедливо неравенство:*

$$T^+(n) \leq 3n - 4 \text{ при } n \geq 2$$

Доказательство. Мы построим тест T_A для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, применяя последовательно леммы 2 и 3. Длина теста T_A только увеличится, если все пометки f_4 заменить на f_m^4 , а пометки f_5 заменить на f_m^5 в дереве функции f . Поэтому $|T_A(f(x_1, \dots, x_n))| \leq F_A(u_1, \dots, u_l)$, где u_1, \dots, u_l — набор натуральных чисел, определяемый степенями захода вершин дерева. Каждой вершине, помеченной дизъюнкцией или конъюнкцией, соответствует набор из $t - 1$ единиц, где t — степень захода вершины, а каждой вершине, помеченной специальной функцией — число $t - 1$. При этом получается, что $u_1 + \dots + u_l = n - 1$.

Функционал F_A обладает следующими свойствами:

- 1) $F_A(1, u_2, \dots, u_l) = F_A(u_2, u_3, \dots, u_l) + 2$; при этом $F_A(1) = 2$.
- 2) $F_A(u_1, u_2, \dots, u_l) = F_A(\underbrace{1, \dots, 1}_{u_1-1}, u_2, \dots, u_l) + u_1 + 1$.

Из этих свойств следует:

$$F_A(u_1 + u_2, \dots, u_l) = F_A(u_1, u_2, \dots, u_l) + 1.$$

Поэтому

$$\max_{u_1 + \dots + u_l = n-1} F_A(u_1, \dots, u_l) = F_A(n-1),$$

$$F_A(n-1) = n + F_A(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}) \leq n + 2(n-2) = 3n - 4.$$

□

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$T(n) \leq 3n - 2 \text{ при } n \geq 2$$

Таблица 2. Наборы, на которых показывается существенность x_1

№	Значение подфункции $f_{x_1=\alpha}$	Значение из M_n
1	$f(0, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = (0 \vee \dots \vee 0) \& 1 = 0$	$f(1, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 1$
2	$f(1, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = (1 \& \dots \& 1) \vee 0 = 1$	$f(0, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 0$
3	$f(0, 1, 0, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = f_4(0, 1, 0, 0) = 0$	$f(1, 1, 0, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1$
4	$f(1, 1, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = f_4(1, 1, 0, 1) = 1$	$f(0, 1, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0$
5	$f(0, 1, 0, 0, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = f_5(0, 1, 0, 0, 0) = 0$	$f(1, 1, 0, 0, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1$
6	$f(1, 1, 0, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = f_5(1, 1, 0, 0, 1) = 1$	$f(0, 1, 0, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0$
7	$f(0, 1, 0, \dots, 0, \beta_{s+2}, \dots, \beta_n) = f_m^s(0, 1, 0, \dots, 0) = 0$	$f(1, 1, 0, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1$
8	$f(1, 0, 1, \dots, 1, \beta_{s+2}, \dots, \beta_n) = f_m^s(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$	$f(0, 0, 1, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0$

Доказательство. По теореме 1 и лемме 1 при $n \geq 2$ справедливо неравенство $T(n) \leq 5n - 4$.

Не ограничивая общности рассуждений, можем считать тестируемую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ монотонной. При этом обозначим M_n, \dots, M_2 множества наборов, добавляемые на каждом шаге алгоритма теоремы 1 в тест функции f , а через M_1 — полный тест для функции последней переменной. Заметим, что $M_n \cup \dots \cup M_2 = T_A$.

Докажем от противного, что множество $M_n \cup \dots \cup M_1$ — тест относительно неповторной альтернативы для функции f . Предположим, что $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция с минимальным числом аргументов, для которой это не так. Тогда $M_{n-1} \cup \dots \cup M_1$ — тест для $f_{x_1=\alpha}$.

Таблица 2 показывает существенность и монотонность переменной x_1 во всех возможных случаях. Множество наборов $M_n \cup \dots \cup M_1$ содержит по построению T_A — проверяющий тест для функции f в базисе B^+ . Так как $x_1 = \alpha$ — незабывающая подстановка для f , то $M_{n-1} \cup \dots \cup M_1$ показывает существенность оставшихся переменных. То есть $M_n \cup \dots \cup M_1$ является тестом для функции f . Противоречие. При этом

$$|M_n \cup \dots \cup M_1| \leq |T_A| + |M_1| \leq 3n - 2.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

- [1] Алексеев В.Б., *Лекции по дискретной математике*, М.: ИНФРА-М, Москва, 2012.
- [2] Вороненко А.А., “О проверяющих тестах для неповторных функций”, *Математические вопросы кибернетики*, 2002, № 11, 163–176.
- [3] Стеценко В.А., “О предплюхих базисах в P_2 ”, *Математические вопросы кибернетики*, 4 (1992), 139–177.
- [4] Chistikov D.V., Fedorova V.S, Voronenko A.A., “Certificates of Non-Membership for Classes of Read-Once Functions”, *Fundamenta Informaticae, издательство I O S press (Netherlands)*, 132:1 (2014), 63–77.
- [5] Кафтан Д.В., “Тестирование неповторных функций в некоторых расширенных элементарных базисах”, *Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2021, № 3, 13–19.
- [6] Чистиков Д.В., “Тестирование неповторных функций в элементарном базисе”, *Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2011, № 4, 37–40.
- [7] Кафтан Д.В., “Древесное представление неповторных функций в расширенных элементарных базисах”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, 3:43 (2017), 37–49.

Testing read-once functions in the elementary basis augmented with all weakly read-multiple unate functions Voronenko A.A., Kaftan D.V.

It is proved that the Shannon function for the test length with respect to a read-once alternative in the elementary basis augmented with all weakly read-multiple unate functions does not exceed $3n - 2$.

Keywords: read-once functions, checking test, weakly read-multiple functions.

References

- [1] Alekseev V.B., *Lekcii po diskretnoj matematike*, INFRA-M, Moscow, 2012 (In Russian).
- [2] Voronenko A.A., “O proveryayushchih testah dlya bespovtornyh funkcij”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, 2002, № 11, 165–176 (In Russian).
- [3] Stecenko V.A., “O predplokih bazisah v P_2 ”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, 4 (1992), 139–177 (In Russian).
- [4] Chistikov D.V., Fedorova V.S, Voronenko A.A., “Certificates of Non-Membership for Classes of Read-Once Functions”, *Fundamenta Informaticae, издательство I O S press (Netherlands)*, 132:1 (2014), 63–77.
- [5] Kaftan D.V., “Testirovanie bespovtornyh funkcij v nekotoryh rasshirenyh elementarnyh bazisah (to be translated)”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2021, № 3, 13–19 (In Russian).

- [6] Chistikov D.V., “Testing read-once functions over the elementary basis”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **35**:4 (2011), 189–192.
- [7] Kaftan D.V., “On tree representation of read-once functions in extended elementary bases”, *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki.*, **3**:43 (2017), 37–49.