Классы кусочно-параллельных функций, содержащие все одноместные

А. Отрощенко[1]

Для класса кусочно-параллельных функций, реализуемых схемами из линейных элементов и функций Хэвисайда, получен алгоритм проверки полноты конечных подмножеств, дополненных одноместными функциями. Таким образом, для рассматриваемого класса решена задача Слупецкого.

Ключевые слова: Кусочно-линейная функция, кусочно-параллельная функция, проблема полноты, критерий Слупецкого.

1. Определение кусочно параллельной функции

В соответствии с [2], мы рассматриваем класс PP кусочно-параллельных функций, которые строятся из линейных функций $a_1x_1 + ... + a_nx_n + a_0 : R^n \to R, a_i \in R, i = 0, 1, ..., n, n \in 0, 1, ...$ и функции Хэвисайда $\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ с использованием операций суперпозиции. Как показано в [2], функция f из PP может быть представлена в следующем виде:$f = f_L + f_{PC}$, где f_L -линейная функция, а f_{PC} - кусочно-постоянная функция. Будкм обозначать $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.
В соответствии с [1], кусочно-параллельная функция имеет вид

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{a}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k). \qquad (1)$$

[1] *Отрощенко Александр Дмитриевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: iskander.aka@mail.ru.

Otroschenko Alexander Dmitrievich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

где $\sigma_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $\chi(A) = \begin{cases} 1, \text{условие } A \text{ выполнено} \\ 0, \text{условие } A \text{ не выполнено} \end{cases}$.

В дальнейшем, вместо $\sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$ мы будем писать $NL_f(\vec{x})$.

Будем называть множество значений аргумента соответствующую определенному d_i в дальнейшем носителем сигнатуры i, а сам d_i - сдвигом. Носитель сигнатуры, неограниченный хотя бы с одной стороны по каждой из координат, будем называть нограниченным. Плоскости разделяющие носители сигнатуры будем называть разрезами. Мы будем рассматривать дальше кусочно-параллельные функции с конечным числом сдвигов. Обозначим U множество кусочно-параллельных функций, замыкание которого содержит все одноместные.

2. Предполнота и замкнутость класса функций с линейной частью, зависящей от не более чем одной переменной

Обозначим множество функций с линейной частью, зависящей от не более чем одной переменной NLL_1.

Теорема 1. *NLL_1 - предполный класс в PP.*

Доказательство. Замкнутость его очевидна. Пусть есть $f \notin NLL_1$.
$f = \langle \vec{f_l}, \vec{x} \rangle + NL_f(\vec{x})$ и в $\vec{f}$ больше одной ненулевой компоненты. Возьмем $g(y, \vec{z}) = y - NL_f(\vec{z})$, $g \in NLL_1$. Тогда

$$g(f(\vec{x}), \vec{x}) = \langle \vec{f_l}, \vec{x} \rangle + NL_f(\vec{x}) - NL_f(\vec{x}) = \langle \vec{f_l}, \vec{x} \rangle$$

где у $\vec{f_l}$, больше одной ненулевой компоненты. Очевидно, что можно с помощью одноместных функций далее получить сумматор, а затем и все кусочно-параллельные функции. □

3. Критерий Слупецкого для пространства кусочно-параллельных функций

3.1. Формулировка критерия и общий план доказательства

Теорема 2. *Замыкание U совпадает с классом кусочно-параллельных функций тогда, и только тогда, когда $U \not\subseteq NLL_1$*

Наша цель - получение сумматора, т.к. при добавлении его к одноместным, мы получим базис пространства кусочно-параллельных функций. Для доказательства мы сначала получим функцию $x+\theta(y)$. Далее, мы дадим определение угловой функции, и получим эту функцию. Затем, с помощью угловой функции и функции $x+\theta(y)$ мы покажем получение функций $F(x,y)=\theta(ax+by+c)$, после чего избавимся от нелинейной части у двухместной функции.

3.2. Проводник с независимой ступенью

Назовем функцию $x+\theta(y)$ проводником с независимой ступенью.

Теорема 3. *Пусть* $U \not\subseteq NLL_1$. *Тогда* $g \in [U]$, *где* $g(x,y)=x+\theta(y)$

Доказательство. Пусть $f \in U/NLL_1$.
Значит, в $f(\vec{x})=\langle \vec{a}_0,\vec{x}\rangle+\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(\langle \vec{a}_j,\vec{x}\rangle+c_j)=\sigma_{ij})-k)$ линейная часть зависит от не менее чем двух переменных, поэтому у $\vec{a}_0$ есть две ненулевые компоненты. Пусть эти компоненты по первой и второй переменной. Для простоты, подставим во все остальные переменные ноль, в $x_1=x/a_{01}$, $x_2=y/a_{02}$ и получим $f_{01}(x,y)$. Итак

$$f_{01}(x,y)=x+y+\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(\frac{a_{j1}}{a_{01}}x+\frac{a_{j2}}{a_{02}}y+c_j)=\sigma_{ij})-k)=$$

$$=x+y+\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(A_jx+B_jy+c_j)=\sigma_{ij})-k).$$

Далее определим константы $C_1>0$, $C_2>0$ и $0<\epsilon\leq 1$. Рассмотрим $f_{02}(x,y)=f_{01}(x+2C_1\theta(x)-C_1,\epsilon\theta(y)+C_2)$.

$$f_{02}(x,y)=x+2C_1\theta(x)-C_1+\epsilon\theta(y)+C_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(A_j(x+2C_1\theta(x)-C_1)+B_j(\epsilon\theta(y)+C_2)+c_j)=\sigma_{ij})-k)=$$

$$=x+\epsilon\theta(y)+2C_1\theta(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(A_j(x+2C_1\theta(x)-C_1)+\epsilon B_j\theta(y)+B_jC_2+c_j)=\sigma_{ij})-k)+$$

$$+C_2 - C_1.$$

Теперь подберем C_1 и C_2, так чтобы $\forall j, \epsilon$, выражение

$$W(j,x,y) = sgn(A_j(x + 2C_1\theta(x) - C_1) + \epsilon B_j\theta(y) + B_jC_2 + c_j)$$

не зависело от y. Сделаем это так. Если $\forall j,\ B_j = 0$, то $W(j,x,y)$ не зависит от y. Тогда положим $C_2 = 0$. В противном случае, положим $C_2 = \epsilon + \max\limits_{j:B_j\neq 0} \frac{|c_j|}{|B_j|} + 1$.

Пусть $V = \max\limits_{j}(|\epsilon B_j| + |B_jC_2| + |c_j|)$. Положим $C_1 = \frac{V+1}{\min\limits_{j:A_j\neq 0}|A_j|}$.

Теперь заметим, что если для какого-то j, $A_j = 0$, то или

$$\begin{cases} B_j(C_2+\epsilon) + c_j > 0 \\ B_jC_2 + c_j > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} B_j(C_2+\epsilon) + c_j < 0 \\ B_jC_2 + c_j < 0, \end{cases}$$

т.е. в этом случае $W(j,x,y)$ не зависит от y. Пусть в этом случае $W(j,x,y) = G_j$.

Если $A_j \neq 0$, то

$$W(j,x,y) = sgn(A_j(x + 2C_1\theta(x) - C_1) + \epsilon B_j\theta(y) + B_jC_2 + c_j) =$$

$$= sgn(A_j(x + \frac{2(V+1)}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}\theta(x) - \frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|} + \frac{\epsilon B_j\theta(y) + B_jC_2 + c_j}{A_j})) =$$

$$= sgnA_j sgn(x + \frac{2(V+1)}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}\theta(x) - \frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|} + \frac{\epsilon B_j\theta(y) + B_jC_2 + c_j}{A_j})$$

Теперь заметим, что $\frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|} > |\frac{\epsilon B_j\theta(y)+B_jC_2+c_j}{A_j}|$, а значит, при $x \geq 0$,

$$x + \frac{2(V+1)}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}\theta(x) - \frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|} + \frac{\epsilon B_j\theta(y) + B_jC_2 + c_j}{A_j} \geq$$

$$\geq \frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|} - |\frac{\epsilon B_j\theta(y) + B_jC_2 + c_j}{A_j}| > 0,$$

а при $x<0$,

$$x+\frac{2(V+1)}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}\theta(x)-\frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}+\frac{\epsilon B_j\theta(y)+B_jC_2+c_j}{A_j}<$$

$$<-\frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}+|\frac{\epsilon B_j\theta(y)+B_jC_2+c_j}{A_j}|<0,$$

а значит,

$$W(j,x,y)=$$

$$=sgnA_j sgn(x+\frac{2(V+1)}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}\theta(x)-\frac{V+1}{\min\limits_{i:A_i\neq 0}|A_i|}+\frac{\epsilon B_j\theta(y)+B_jC_2+c_j}{A_j})=$$

$$=(2\theta(x)-1)sgnA_j,$$

и при нашем выборе C_1, C_2, не зависит от y. Осуществим эту подстановку, пока не определяя ϵ.

$$f_{02}(x,y)=x+\epsilon\theta(y)+2C_1\theta(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}d_i\theta(\sum_{j=1}^{s}\chi(sgn(A_j(x+2C_1\theta(x)-C_1)+\epsilon B_j\theta(y)+B_jC_2+c_j)=\sigma_{ij})-k)+$$

$$+C_2-C_1=x+\epsilon\theta(y)+2C_1\theta(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}d_i\theta(\sum_{j=1,A_j\neq 0}^{s}\chi(sgnA_j(2\theta(x)-1)=\sigma_{ij})+\sum_{i=1}^{k}d_i\theta(\sum_{j=1,A_j=0}^{s}\chi(G_j=\sigma_{ij})-k)+$$

$$+C_2-C_1$$

При $x\geq 0$ имеем,

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\theta(\sum_{j=1,A_j\neq 0}^{s}\chi(sgnA_j(2\theta(x)-1)=\sigma_{ij})+\sum_{i=1}^{k}d_i\theta(\sum_{j=1,A_j=0}^{s}\chi(G_j=\sigma_{ij})-k)=$$

$$= \sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1, A_j\neq 0}^{s} \chi(sgnA_j = \sigma_{ij}) + \sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1, A_j=0}^{s} \chi(G_j = \sigma_{ij}) - k) = T_{pos},$$

а при $x < 0$ имеем,

$$\sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1, A_j\neq 0}^{s} \chi(sgnA_j(2\theta(x)-1) = \sigma_{ij}) + \sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1, A_j=0}^{s} \chi(G_j = \sigma_{ij}) - k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1, A_j\neq 0}^{s} \chi(-sgnA_j = \sigma_{ij}) + \sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1, A_j=0}^{s} \chi(G_j = \sigma_{ij}) - k) = T_{neg}.$$

Тогда

$$f_{02}(x, y) = x + \epsilon\theta(y) + 2C_1\theta(x) + (T_{pos} + T_{neg})\theta(x) - T_{neg} + C_2 - C_1,$$

то есть

$$f_{02}(x, y) = x + \epsilon\theta(y) + A\theta(x) - B$$

Если $A \leq 0$, то рассмотрим

$$f_{03}(x, y) = f_{02}(x - A\theta(x), y) + B = x - A\theta(x) + \epsilon\theta(y) + A\theta(x - A\theta(x)) - B + B =$$

$$= x - A\theta(x) + \epsilon\theta(y) + A\theta(x) = x + \epsilon\theta(y),$$

а затем положим $\epsilon = 1$ и получим искомую функцию $f_{03}(x, y) = x + \theta(y)$.
Если $A > 0$, то подставим $f_{02}(x, y) + B - A/2$ в $q(z) = z - A\theta(z) + A/2$:

$$f_{13}(x, y) = q(f_{02}(x, y) + B) =$$

$$= x + A\theta(x) + \epsilon\theta(y) - A\theta(x + A\theta(x) + \epsilon\theta(y) - A/2) - B + B - A/2 + A/2 =$$

$$= x + A\theta(x) + \epsilon\theta(y) - A\theta(x + A\theta(x) + \epsilon\theta(y) - A/2).$$

Теперь выберем $\epsilon = A/4$. Тогда, если $x \geq 0$, то

$$x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A/2 \geq A - A/2 = A/2 > 0,$$

а если $x < 0$, то

$$x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A/2 < A/4 - A/2 = -A/2 < 0,$$

то есть $sgn(x + A\theta(x) + \epsilon\theta(y) - A/2) = 2\theta(x) - 1$. Теперь

$$f_{13}(x, y) = x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A\theta(x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A/2) =$$

$$= x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A\theta(sgn(x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A/2)) =$$

$$= x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A\theta(2\theta(x) - 1) =$$
$$= x + A\theta(x) + A\theta(y)/4 - A\theta(x) = x + A\theta(y)/4.$$

Значит, $4f_{13}(Ax/4, y)/A = x + \theta(y)$ - искомая. Теорема доказана. □

В условиях теоремы 3 $x + \sum_{i=1}^{n} d_i\theta(y_i) \in [U]$

Доказательство. Ясно, что $g_b(x, y) = x + b\theta(y) = b((\frac{1}{b}x) + \theta(y))$. Тогда функция

$$g_{d_n}(g_{d_{n-1}}(g_{d_{n-2}}(\ldots g_{d_2}(g_{d_1}(x, y_1), y_2), \ldots), y_{n-2}), y_{n-1}), y_n) =$$

$$= x + \sum_{i=1}^{n} d_i\theta(y_i)$$

также принадлежит $[U]$. □

3.3. Функция ’уголок’

Назовем ‘уголком‘ функцию $\theta(\theta(y - x) + \theta(x) - 2)$. Имеет место:

Теорема 4. *Пусть $U \not\subset NLL_1$. Тогда замыкание U содержит $\theta(\theta(y - x) + \theta(x) - 2)$.*

Доказательство. В доказательстве теоремы 2.1 было показано, что при условии теоремы, замыкание содержит функцию

$$f(x,y) = x + y + \sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(A_jx + B_jy + c_j) = \sigma_{ij}) - k).$$

Рассмотрим теперь функцию

$$h(x,y) = f(-x,y) = y - x + \sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(-A_jx + B_jy + c_j) = \sigma_{ij}) - k).$$

Множество состоящее из всех точек пересечения множества прямых $\{-A_jx + B_jy + c_j = 0\}_{j=1}^{k}$, пусть это будет множество точек $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{u}$ Добавим туда и множество точек пересечения этих прямых с осями x и y.
Рассмотрим

$$h_1(x,y) = h(x + C_x^1, y + C_y^1),$$

где $C_x^1 = \max\limits_i |x_i| + 1$, $C_y^1 = \max\limits_i |y_i| + 1$. Вершины областей тоже сдвинутся, и перейдут в $\{x_i - C_x^1, y_i - C_y^1\}_{i=1}^{u}$. Заметим, что каждая координата этих точек меньше нуля. Теперь рассмотрим те, $-A_jx + B_jy + c_j = 0$, у которых $A_j = 1$, $B_j = 1$. Пусть $C_{par} = \max\limits_{A_j=1,B_j=1} |c_j| + 1$, если же $\{A_j = 1, B_j = 1\} = \emptyset$, то положим $C_{par} = 1$.
Рассмотрим

$$H(x,y) = h_1(x, y + C_{par}) - V.$$

Заметим, что точки пересечений разрезов по-прежнему лежат левее оси y и ниже оси x. Возьмем $V = \max|d_i| + C_{par}$. Выпишем $H(x,y)$.

$$H(x,y) = y + C_{par} - x + \sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(-A_jx + B_jy + c_j^{'}) = \sigma_{ij}) - k) - V.$$

Заметим, что в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $H(x,y)$ имеет только неограниченные носители сигнатур, т.к. все точки пересечения прямых, на которых лежат границы носителей находятся в области $x < 0$, $y < 0$. Также, при $x > y$, функция

$$H(x,y) = (y-x) + \sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1}^{s}\chi(sgn(-A_jx + B_jy + c_j^{'}) = \sigma_{ij}) - s) + C_{par} - V =$$

$$= (y-x) + \sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1}^{s}\chi(sgn(-A_jx + B_jy + c_j^{'}) = \sigma_{ij}) - s) - \max|d_i| <$$

$$< y - x < 0.$$

Теперь рассмотрим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} H(x,y) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим разрезы $-A_j x + B_j y + c_j^{'} = 0$. Все прямые с $A_j = 0$, или $B_j = 0$ лежат или ниже, или правее области $x \geq 0$,$y \geq 0$ и положение относительно них не будет влиять на решение системы при $x \geq 0$, $y \geq 0$. Значит мы можем считать, что все прямые имеют вид $y - k_j x - r_j = 0$. Отсортируем их по k_j, по убыванию, при равных k_j отсорируем по убыванию r_j. Теперь заметим, что если для $j > i$, $k_j < k_i$, то и $r_j < r_i$, т.к. у линий с номерами j и i у точки пересечения координата $x = \frac{r_i - r_j}{k_j - k_i}$, а раз $x < 0$ и $k_j - k_i < 0$, то $r_i - r_j > 0$.
Значит разрезы при нашей нумерации располагаются по порядку против часовой стрелки при обходе относительно точки $(0,0)$ в области $x > 0$ и т.к. они не имеют пересечений в $x \geq 0$,$y \geq 0$, то при $x \geq 0$,$y \geq 0$,

$$H(x,y) = \begin{cases} y - x + W_1 : y - k_1 x - c_1 > 0 \\ y - x + W_1^{'} : y - k_1 x - c_1 = 0 \\ y - x + W_2 : y - k_1 x - c_1 < 0, y - k_2 x - c_2 > 0 \\ y - x + W_2^{'} : y - k_2 x - c_2 = 0 \\ \dots \\ y - x + W_i : y - k_{i-1} x - c_{i-1} < 0, y - k_i x - c_i > 0 \\ y - x + W_i^{'} : y - k_i x - c_i = 0 \\ \dots \\ y - x + W_t : y - k_t x - c_t > 0 \\ y - x + W_t^{'} : y - k_t x - c_t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда система 2 эквивалентна следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} y-x+W_1 \geq 0 \\ y-k_1x-c_1>0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0, \end{cases}
\begin{cases} y-x+W_1 > 0 \\ y-k_1x-c_1=0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0, \end{cases} \\
\begin{cases} y-x+W_2 \geq 0 \\ y-k_1x-c_1<0 \\ y-k_2x-c_2>0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0, \end{cases}
\begin{cases} y-x+W_2 \geq 0 \\ y-k_2x-c_2=0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0, \end{cases} \\
\qquad\qquad\ldots \\
\begin{cases} y-x+W_t \geq 0 \\ y-k_{i-1}x-c_{i-1}<0 \\ y-k_ix-c_i>0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0, \end{cases}
\begin{cases} y-x+W_l > 0 \\ y-k_ix-c_i=0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0, \end{cases} \\
\qquad\qquad\ldots \\
\begin{cases} y-x+W_t > 0 \\ y-k_tx-c_t<0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0. \end{cases}
\end{array}\right. \tag{3}$$

Теперь:
1)$H(x,y)<0$ при $x<y$. Значит можно не учитывать решения в областях, у которых для обеих ограничивающих прямых $k_i \leq 1$.
2)Условия $y-k_{i-1}x-c_{i-1}<0, y-k_ix-c_t>0$ определяют константу для $H(x,y)$

Распишем систему 3 далее:

$$\left[\begin{array}{c} \begin{cases} y \geq x - W_1 \\ y > k_1 x + c_1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0, \end{cases} \begin{cases} y \geq x - W_1^{'} \\ y = k_1 x + c_1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y \geq x - W_2 \\ y < k_1 x + c_1 \\ y > k_2 x + c_2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0, \end{cases} \begin{cases} y \geq x - W_2^{'} \\ y = k_2 x + c_2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0, \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} y \geq x - W_t \\ y < k_{t-1} x + c_{t-1} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \tag{4}$$

где $k_{t-1} = \min\limits_{k_i > 1} k_i$. Рассмотрим все точки пересечения пар прямых $y = x - W_i, y = x - W_i^{'}$ и $y = k_i x + c_i$ (пары берем учавствующие в одних и тех же системах), а также $y = x - W_i$ и $y = k_{i-1} x + c_{i-1}$ (для пар содержащихся в одних и тех же системах). Пусть это точки $\{X_i^{'}, Y_i^{'}\}$. Пусть $G = \max X_i^{'} + 1$. Рассмотрим, как выглядят решения системы при $x \geq G$. Заметим, что для этих x выполнено следующее: $y \geq x - W_t$, тогда и только тогда, когда $H(x, y) \geq 0$.

Это очевидно из геометрических соображений, но покажем это строго. Пусть (X, Y) - решение следующей системы

$$\begin{cases} y \geq x - W_i \\ y < k_{i-1} x + c_{i-1} \\ y > k_i x + c_i \\ x \geq 0 \\ y \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

и $X = \delta + X_{i0} = \frac{-c_i - W_i}{k_i - 1}$, где X_{i0}, Y_{i0}, решение системы

$$\begin{cases} y = x - W_i \\ y = k_i x + c_i, \end{cases}$$

а $\delta > 0$. В этом случае, т.к. $Y > k_i X + c_i = k_i(X_{i0} + \delta) + c_i = k_i X_{i0} + \delta k_i + c_i = \delta(k_i - 1) + \delta + X_{i0} - W_i = X - W_i + \delta(k_i - 1)$, а $k_i > 1$, то $Y > X - W_i$. Это значит, что в рассматриваемом случае система 5 равносильна системе

$$\begin{cases} y < k_{i-1}x + c_{i-1} \\ y > k_i x + c_i \\ x \geq X_{i0} \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Повторим те же рассуждения для системы

$$\begin{cases} y \geq x - W_j' \\ y = k_j x + c_j \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

и получим, что она равносильна системе

$$\begin{cases} y = k_j x + c_2 \\ x \geq X_{j0}' \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Мы рассматриваем, совокупность систем 4 при $x \geq G$, и далее получаем из совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq x - W_1 \\ y > k_1 x + c_1 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq x - W_1' \\ y = k_1 x + c_1 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq x - W_2 \\ y < k_1 x + c_1 \\ y > k_2 x + c_2 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq x - W_2' \\ y = k_2 x + c_2 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \qquad\qquad \dots \\ \qquad \begin{cases} y \geq x - W_t \\ y < k_{t-1} x + c_{t-1} \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > k_1x + c_1 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y = k_1x + c_1 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y < k_1x + c_1 \\ y > k_2x + c_2 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y = k_2x + c_2 \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \qquad\qquad \dots \\ \qquad \begin{cases} y \geq x - W_t \\ y < k_{t-1}x + c_{t-1} \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теперь заметим, что эта совокупность переходит в следующую

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq k_{t-1}x + c_{t-1} \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq x - W_t \\ y < k_{t-1}x + c_{t-1} \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \tag{6}$$

и (X, Y) - одно из ее решений. Теперь, пусть (X_0, Y_0) решение системы:

$$\begin{cases} y = x - W_t \\ y = k_{t-1}x + c_{t-1}. \end{cases}$$

Значит, $X_0 = \frac{-c_{t-1}-W_t}{k_{t-1}-1}$. Имеем, $X = X_0+\delta$, $\delta > 0$. Пусть $Y > k_{t-1}X+c_{t-1}$. Тогда

$$Y > k_{t-1}(X_0 + \delta) + c_{t-1} = (k_{t-1} - 1)X_0 + (k_{t-1} - 1)\delta + X_0 + \delta + c_{t-1} =$$

$$= -c_{t-1} - W_t + (k_{t-1} - 1)\delta + X_0 + \delta + c_{t-1} = X - W_t + (k_{t-1} - 1)\delta > X - W_t.$$

Отсюда следует, что совокупность 6, при $x \geq G$, эквивалентна системе

$$\begin{cases} y \geq x - W_t \\ x \geq max(G,0) \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $max(G,0) = C_{maj}$, а $W_t = D$. Тогда системы $\begin{cases} y - x + W_t \geq 0 \\ x \geq C_{maj} \\ y \geq 0 \end{cases}$ и

$\begin{cases} H(x,y) \geq 0 \\ x \geq C_{maj} \\ y \geq 0 \end{cases}$ эквивалентны.

Отсюда следует, что

$$\theta(\theta(H(x,y)) + \theta(x - C_{maj}) + \theta(y) - 3) = \theta(\theta(y - x + D) + \theta(x - C_{maj}) + \theta(y) - 3).$$

Функцию $\phi(l,m,n) = \theta(\theta(l) + \theta(m) + \theta(n) - 3)$ несложно получить с помощью функции $g(x,y) = x + \theta(y)$ и одноместных, заметив что $\phi(l,m,n) = g(0, g(g(g(-3,n),m),l)$.

Подставим в x, $x = x^{‘} + D$, и пусть $R = D - C_{maj}$. Тогда $\theta(\theta(H(x^{‘} + D,y)) + \theta(x^{'} + R) + \theta(y) - 3) = \theta(\theta(y - x^{'}) + \theta(x^{'} + R) + \theta(y) - 3)$.

Заметим, что, если $R < 0$, то

$$\theta(\theta(y - x^{'}) + \theta(x^{'} + R) + \theta(y) - 3) = \theta(\theta(y - x^{'}) + \theta(x^{'} + R) - 2),$$

и мы получаем нужную функцию подстановкой $y = y^{''} + R$, $x^{'} = x^{''} - R$.

Если $R \geq 0$, то

$$\theta(\theta(\theta(y - x^{'}) + \theta(x^{'} + R) + \theta(y) - 3) + \theta(x) - 2) = \theta(\theta(y - x) + \theta(x) - 2).$$

Теорема доказана. □

Теперь получим следующий результат.

Теорема 5. *Пусть $U \not\subset NLL_1$. Тогда $\forall a,b,c \in R$ замыкание U содержит $F_{a,b,c}(x,y) = \theta(ax + by + c)$.*

Доказательство. В предыдущих теоремах мы показали, что

$$\{h(x,y) = \theta(\theta(y - x) + \theta(x) - 2), g(x,y) = x + \theta(y)\} \subset [U]$$

. Теперь покажем, что $\theta(y - x) \in [U]$. Рассмотрим следующую функцию:

$$f_{prot}(x,y) = \theta(h(x,y) + h(-y,-x) + \theta(\theta(-x) + \theta(y) - 2) - 0.5).$$

Ясно, что $h(x,y)$ равна $\theta(y-x)$, при $x \geq 0$, $h(-y,-x) = \theta(\theta(y-x)+\theta(-y)-2)$ равна $\theta(y - x)$, при $x < 0$, $y < 0$, а $\theta(\theta(-x) + \theta(y) - 2)$ равна $\theta(y - x)$ при $x < 0$, $y \geq 0$. При этом, если $\theta(y - x) = 0$, то и $h(x,y)$, $h(-y,-x)$, $\theta(\theta(-x)+\theta(y)-2)$ также равны нулю, а при этом объединение множеств, где эти функции единичны, дают множество на котором $\theta(y - x) = 1$. Теперь несложно увидеть, что $f_{prot}(x,y) = \theta(y - x)$. Осталось заметить, что

$$f_{prot}(-ax, by + c) = \theta(ax + by + c) = F_{a,b,c}(x,y).$$

Теорема доказана. □

3.4. Завершение доказательства критерия Слупецкого

Итак, в условиях теоремы 2 замыканию принадлежит $x+y+NL(x,y)$. Построим $u-NL(x,y)$. Пусть

$$NL(x,y)=\sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1}^{s}\chi(sgn(A_jx+B_jy+C_j)=\sigma_{ij})-k).$$

Следуя [1],

$$NL(x,y)=\sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1}^{v_i} q_j\theta(A'_{ij}x+B'_{ij}y+C'_{ij})-r_i).$$

С помощью функции $x+\theta(y)$ постром $v_i(p,\vec{o})=p+\sum_{j=1}^{l_i} q_j\theta(o_j-0.5)-r_i$. Теперь подставим $o_j=F_{A'_{ij},B'_{ij},C'_{ij}}(x,y)$, а $p=r_i$. После этого, получим $B(u,\vec{z})=u-\sum_{i=1}^{k} d_i\theta(z_i)$, и подставим в $z_i=v_i(r_i,(F_{A'_{ij},B'_{ij},C'_{ij}}(x,y))_{j=1}^{l_i})$. Получим функцию

$$\mu(u,x,y)=u-\sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1}^{v_i} q_j\theta(\theta(A'_{ij}x+B'_{ij}y+C'_{ij})-0.5)-r_i)=$$

$$=u-\sum_{i=1}^{k} d_i\theta(\sum_{j=1}^{v_i} q_j\theta(A'_{ij}x+B'_{ij}y+C'_{ij})-r_i).$$

Теперь $\mu(x+y+NL(x,y),x,y)=x+y$.
Мы получили сумматор, а значит базис пространства кусочно-параллельных функций принадлежит $[U]$, а поэтому $[U]$ совпадает со множеством PP.

4. Заключение

Таким образом в настоящей работе решена задача Слупецкого для класса кусочно-параллельных функций. Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.А. Часовских.

Список литературы

[1] В. С. Половников, "О задаче проверки функциональной полноты в классе кусочно-параллельных функций", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, №6, 31–35.

[2] Половников В.С., “О нелинейной сложности нейронных схем Мак-Каллока-Питтса.”, *М., Интеллектуальные системы.*, 2007, №11, 261-275.

Classes of piecewise parallel functions containing all single functions

A. Otroschenko

For a class of piecewise-parallel functions implemented by schemes of linear elements and Heaviside functions, an algorithm for checking the completeness of finite subsets supplemented by single functions is obtained. Thus, for this class solved the Slupetski problem
Keyword: The piecewise-linear function piecewise-parallel function, the completeness problem, the Slupetski criterion.