Клеточные автоматы с локаторами

Гасанов Э.Э.[1]

В работе вводится новый математический объект — клеточный автомат с локаторами. Он получается добавлением к клеточному автомату новой возможности - посылать сигналы в “эфир” и получать из “эфира” суммарный сигнал всех элементарных автоматов. Приведены примеры задач, решение которых существенно упрощается, если для их решения использовать клеточные автоматы с локаторами вместо традиционных клеточных автоматов.

Ключевые слова: клеточные автоматы, однородные структуры, задача о стрелках, конструирование движущихся изображений, построение кратчайшего пути.

1. Введение

Клеточные автоматы (другие названия: самовоспроизводящиеся автоматы и однородные структуры) являются дискретными математическими моделями широкого класса реальных систем вместе с протекающими в них процессами.

Понятие клеточного автомата возникло в результате усовершенствования модели Дж. фон Неймана [1, 2, 3], предложенной им для описания процессов самовоспроизведения в биологии и технике, и в описанном ниже виде использовалось А. Берксом [4], Э. Муром [5], В. Б. Кудрявцевым, А. С. Подколзиным, А. А. Болотовым [6] и другими исследователями.

Клеточный автомат — это математический объект с дискретными пространством и временем. Каждое положение в пространстве представлено отдельной клеткой, а каждый момент времени — дискретным временным шагом или поколением. Состояние каждой пространственной клетки определяется очень простыми правилами взаимодействия. Эти

[1] *Гасанов Эльяр Эльдарович* — профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@gmail.com.

Gasanov Elyar Eldarovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

правила предписывают изменения состояния каждой клетки в следующем такте времени в ответ на текущее состояние соседних клеток. При этом для разных клеток правила изменения состояний могут быть разными.

Если в качестве преобразователя информации, стоящего в клетке пространства, выбрать конечный автомат, причем один тот же для всех клеток, то мы приходим к понятию однородной структуры. В таком случае содержательно клеточный автомат представляет собой бесконечную автоматную схему, построенную следующим образом. Рассмотрим k-мерное евклидово пространство. Разобьем его на гиперкубы с единичным ребром, ребра которых параллельны осям координат. В каждый гиперкуб поместим один и тот же конечный автомат V с m входами и одним выходом. Разветвим выход автомата и соединим с входами его соседей одинаковым образом для всех гиперкубов в пространстве. Получим бесконечную однородным образом устроенную автоматную схему, которая и называется клеточным автоматом. Последовательность состояний отдельных автоматов V, содержащую состояния всех автоматов схемы, будет образовывать состояние клеточного автомата. Последовательность состояний клеточного автомата, возникающая при синхронной работе всех составляющих его конечных автоматов, называется функционированием клеточного автомата.

Клеточные автоматы представляют собой дискретную математическую модель широкого класса реальных систем вместе с протекающими в них процессами, таких как физические среды, в которых реализуются тепловые и волновые явления, химические растворы с реакциями в них, биологические ткани, в которых происходит обмен веществ, технические схемы управления, производящие переработку механических и электрических сигналов, вычислительные схемы и т.п.

Если задать начальные состояния автоматов, то в схеме начнется изменение состояний автоматов, определяемое законами функционирования автоматов и связями между ними. Явление глобального изменения этих состояний и является главным объектом изучения в теории клеточных автоматов.

В данной работе вводится обобщение клеточного автомата, которое предлагается назвать клеточным автоматом с локаторами.

Одним из серьезных ограничений клеточных автоматов является ограниченность шаблона соседства, т.е. каждый автомат может видеть некоторое число своих соседей и тем самым сигналы в клеточных автоматах распространяются относительно медленно. В данной работе предлагается добавить клеточным автоматам возможность передавать некоторые сигналы всем элементарным автоматам одновременно, что позволит преодолеть свойство локальности.

Здесь можно вспомнить модель несжимаемой жидкости, в которой тоже сигналы моментально распространяются по всему объему. Похожая картина наблюдается в квантовой механике и в квантовых клеточных автоматах [7], когда изменение состояния одного автомата вызывает изменение состояния всех “запутанных” с ним автоматов. В работе [8] вводится понятие нелокальных клеточных автоматов. В этой работе нелокальность состоит в том, что для каждого элементарного автомата множество его соседей выбирается случайным образом, и таким образом соседними могут оказаться далеко отстоящие друг о друга элементарные автоматы.

В обычной жизни человек, когда хочет передать информацию не только видимым соседям, он может воспользоваться такими приемами, как подача световых сигналов с помощью сигнальных ракетниц. Еще более распространенным способом является использование радио- и телеэфира.

В данной работе тоже вводится понятие эфира. Считается, что каждый элементарный автомат может послать в эфир некоторый сигнал из конечного алфавита. Элементы алфавита образуют конечную аддитивную коммутативную полугруппу, а сам эфир представляет собой потенциально бесконечный сумматор сигналов элементарных автоматов, где в качестве суммы выступает определяющая операция данной полугруппы. На следующий такт каждый элементарный автомат получает из эфира суммарный сигнал и, учитывая его, изменяет свое состояние. В природе таким сумматором является эфир, который суммирует все радиосигналы естественным образом, и фактически каждый из приемников получает на вход один и тот же сигнал, и уже потом выделяет из общего сигнала нужную ему составляющую.

На этом принципе можно реализовать новый тип интегральных схем, используя в качестве сумматора некоторую подложку, на которую все элементарные автоматы будут сбрасывать некоторые коммутирующие или экстренные сигналы.

Введение эфира и возможности посылать в эфир сигналы позволяет мгновенно передавать сигналы на любые расстояния, и тем самым позволяет одному элементарному автомату управлять поведением сколь угодно далеко удаленного от него другого элементарного автомата. Рассматриваются клеточные автоматы с локаторами, которые могут получать сигналы из эфира с определенных направлений. Иными словами, у каждого элементарного автомата имеется несколько локаторов, направленных в разные стороны, и он может с помощью этих локаторов получать сигналы с этих направлений.

В работе вводится формальная модель клеточных автоматов с локаторами. Приводится решение некоторых классических и новых задач с помощью стандартных клеточных автоматов, а затем показывается, что эти же задачи с помощью клеточных автоматов с локаторами решаются значительно легче.

2. Понятие клеточного автомата с локаторами

Введем понятие клеточного автомата с локаторами, опираясь на определение клеточного автомата, взятое из [9].

Под *телесным углом* в $\mathbb{R}^k$ будем понимать часть пространства $\mathbb{R}^k$, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (*вершины угла*) и пересекающих некоторую гиперповерхность в $\mathbb{R}^k$. По определению будем считать, что вершина телесного угла не входит в телесный угол. В частности, в данной работе мы будем рассматривать два вырожденных случая: полный телесный угол, совпадающий с $\mathbb{R}^k$ без вершины угла, который будем обозначать через Ω, и телесные углы, равные одному лучу, такие телесные углы будем обозначать через вектора, являющиеся направляющими лучей.

Клеточным автоматом с локаторами называется восьмерка

$$\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, E_q, +, L, \varphi, \psi),$$

где $\mathbb{Z}^k$ — множество k-мерных векторов с целыми координатами, $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ — упорядоченный набор попарно различных ненулевых векторов из $\mathbb{Z}^k$, $E_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $+$ — коммутативная полугрупповая операция, заданная на E_q, $L = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ — упорядоченный набор попарно различных телесных углов в $\mathbb{R}^k$ с вершиной в начале координат, φ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_1, \ldots, z_m$, $\varphi : E_n^h \times E_q^m \to E_n$, $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$, ψ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_1, \ldots, z_m$, $\psi : E_n^h \times E_q^m \to E_q$. Элементы множества $\mathbb{Z}^k$ называются *ячейками* клеточного автомата σ; элементы множества E_n называются *состояниями ячейки* клеточного автомата σ; набор V называется *шаблоном соседства* клеточного автомата σ; элементы множества E_q называются *сигналами вещания*; набор L

называется *шаблон локаторов* клеточного автомата σ; функция φ называется *локальной функцией переходов* автомата σ; функция ψ называется *функцией вещания* автомата σ; переменные $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ принимают значения из E_n, переменные $z_1, \ldots, z_m$ принимают значения из E_q. Состояние 0 интерпретируется как *состояние покоя*, а условие $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$ — как условие сохранения состояния покоя.

Здесь нам нужно было вводить упорядочение шаблона соседства V и шаблон локаторов L для того, чтобы установить взаимно однозначное соответствие между векторами из V и телесными углами из L и переменными локальной функции переходов φ и функции вещания ψ соответственно $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ и $z_1, \ldots, z_m$. Это соответствие можно сделать более явным, если индексировать переменные функций φ и ψ самими векторами и телесными углами, т.е. считать, что локальная функция переходов φ и функция вещания ψ зависят от переменных $x_0, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{h-1}}, z_{\nu_1}, \ldots, z_{\nu_m}$, здесь индекс первой переменной есть нулевой вектор $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^k$. Если договориться так индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания, то их можно записывать в любом порядке, и тогда можно воспринимать шаблон соседства и шаблон локаторов просто как множество, а не упорядоченный набор.

В дальнейшем мы так и будем поступать: воспринимать шаблон соседства как множество векторов, а шаблон локаторов как множество телесных углов и индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания векторами из шаблона соседства и телесными углами из шаблона локаторов. При этом мы часто будем опускать в индексах внешние круглые скобки у векторов. Например, если $k = 2$, $n = 2$, $q = 2$ и $V = \{(-1, 0), (1, 0)\}$, $L = \{\Omega, (0, 1)\}$, то пример локальной функции переходов может выглядеть так: $\varphi = x_{-1,0} \& z_\Omega \vee x_{1,0} \& z_{0,1}$.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$, ν — телесный угол с вершиной в начале координат, то через $\nu(\alpha)$ обозначим телесный угол, полученный параллельным переносом угла ν в точку α.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ — ячейка клеточного автомата σ, то множество $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$ называется *окрестностью ячейки* α, а множество $L(\alpha) = \{\nu_1(\alpha), \ldots, \nu_m(\alpha_m)\}$ называется *локаторами ячейки* α.

Состоянием клеточного автомата с локаторами σ назовем пару (e, f), где e — произвольная функция, определенная на множестве $\mathbb{Z}^k$, принимающая значения из E_q, называемая *состоянием эфира*, f — произвольная функция, определенная на множестве $\mathbb{Z}^k$, принимающая значения из E_n и называемая *распределением состояний клеточного авто-*

мата с локаторами σ. Такую функцию можно интерпретировать как некую мозаику, возникающую в k-мерном пространстве в результате приписывания каждой точке с целочисленными координатами некоторого состояния из множества E_n и некоторого сигнала из множества E_q. Множество всевозможных состояний клеточного автомата с локаторами обозначим Σ.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$, (e, f) — состояние клеточного автомата с локаторами σ, то значение $e(\alpha)$ называем *сигналом ячейки* α*, определяемым состоянием* (e, f), а значение $f(\alpha)$ — *состоянием ячейки* α*, определяемым состоянием* (e, f). Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ значение

$$s_i(\alpha) = \sum_{\beta \in \nu_i(\alpha) \cap \mathbb{Z}^k} e(\beta) \tag{1}$$

называем *значением локатора* ν_i*, определяемым состоянием* (e, f). Здесь суммирование сигналов осуществляется с помощью определяющей операции + полугруппы E_q.

На множестве Σ определим *глобальную функцию переходов* Φ клеточного автомата с локаторами σ, полагая $\Phi(e, f) = (e', f')$, где $(e, f), (e', f') \in \Sigma$ и для любой ячейки $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ выполняются тождества

$$f'(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1}), s_1(\alpha), \dots, s_m(\alpha)), \tag{2}$$

$$e'(\alpha) = \psi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1}), s_1(\alpha), \dots, s_m(\alpha)). \tag{3}$$

Содержательная интерпретация отображения Φ такова, что сигнал каждой ячейки и состояние каждой ячейки “после перехода” определяется по состоянию упорядоченной окрестности ячейки и по значениям локаторов “до перехода” с помощью законов ψ и φ одинаково для всех ячеек.

Поведениями клеточного автомата с локаторами σ называем такие последовательности $(e_0, f_0), (e_1, f_1), (e_2, f_2), \dots$ его состояний, для которых выполняется $(e_{i+1}, f_{i+1}) = \Phi(e_i, f_i)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, причем (e_i, f_i) называется *состоянием клеточного автомата с локаторами* σ *в момент* i, а (e_0, f_0) также называется *начальным состоянием клеточного автомата с локаторами* σ.

Состояние клеточного автомата, у которого лишь конечное число ячеек находится в отличном от 0 состоянии и сигналы всех ячеек равны нулю, назовем *конфигурацией.* Множество конфигураций будем обозначать через Σ'.

Если задано некоторое состояние клеточного автомата, то ячейки, находящиеся в отличном от 0 состоянии, будем называть *активными*.

Рассмотрим несколько задач для клеточных автоматов и покажем, что эти задачи клеточными автоматами с локаторами решаются существенно проще.

3. Задача синхронизации стрелков

Задача синхронизации стрелков впервые предложена Дж. Майхиллом в 1957 году и опубликованная (с решением) в 1968 году Ф. Муром [10].

В этой задаче рассматривается одномерный клеточный автомат на $\mathbb{Z}^1$. Шаблон соседства равен $V = \{-1, 1\}$, т.е. каждая ячейка имеет двух соседей слева и справа. Множество состояний имеет как минимум три состояния: 0 — состояние покоя, 1 — солдат в начальном состоянии, 2 — огонь. Имеется ограничение на функцию переходов, что солдат в начальном состоянии, имея соседями таких же солдатов состояния не меняет, т.е. $\varphi(1, 1, 1) = 1$. Начальная конфигурация представляет собой непрерывный отрезок из r ячеек в состоянии 1 (солдаты), а все остальные ячейки находятся в состоянии покоя 0. Надо, чтобы в какой-то момент все активные ячейки перешли в состояние 2 одновременно (выстрелили).

Стандартное решение этой задачи описывает две волны состояний, распространяющиеся по ряду солдат, одна из которых движется в три раза быстрее другой. Быстрая волна отражается от дальнего края ряда и встречается с медленной в центре. После этого две волны разделяются на четыре, движущиеся в разные стороны от центра. Процесс продолжается, каждый раз удваивая число волн, пока длина отрезков ряда не станет равной 1. В этот момент все солдаты стреляют. Это решение требует $3r$ единиц времени для r солдат.

Клеточный автомат с локаторами σ_0, который решает задачу синхронизации стрелков, имеет следующий вид

$$\sigma_0 = (\mathbb{Z}^1, E_3, V = \{-1, 1\}, E_2, \vee, L = \{\Omega\}, \varphi, \psi),$$

где $\vee$ — дизъюнкция, взятая в качестве определяющей операции на полугруппе сигналов $E_2 = \{0, 1\}$, шаблон локаторов состоит из одного полного телесного угла Ω, функция вещания ψ принимает значение 1 только для самого левого солдата в начальном состоянии, т.е. $\psi(x_0, x_{-1}, x_1, z_\Omega) = x_0 \bar{x}_{-1} \bar{z}_\Omega$, локальная функция переходов принимает значение 2 только, если ячейка находится в состоянии 1 и сигнал эфира равен 1, и не меняет состояния во всех остальных случаях, т.е.

$$\varphi(x_0, x_{-1}, x_1, z_\Omega) = \max(2 \cdot ((x_0 = 1) \& (z_\Omega = 1) \vee (x_0 = 2)), 1 \cdot (x_0 = 1)).$$

Тем самым, задачу синхронизации стрелков можно решить за 2 такта с помощью трех состояний и двух сигналов вещания. И фактически это решение полностью соответствует решению, принятому среди военных: командир (самый левый солдат) командует "огонь" и вся команда стреляет.

4. Однонаправленное движение точки на луче

Задача однонаправленного движения точки на луче, предложенная и решенная в работах Е.Е.Титовой [11], состоит в следующем.

Множество ячеек представляет собой множество натуральных числе, т.е. луч направленный вправо. Каждая ячейка имеет двух соседей одного слева и одного справа. Часть состояний ячеек называются метками и считаются черными, остальные состояния считаются белыми. Правильными считаются конфигурации, когда на луче ровно одна черная ячейка, называемая точкой. Ячейка, соответствующая числу 1 (самая левая ячейка) не имеет соседа слева, и переменную, соответствующую состоянию соседа слева этой ячейки, будем воспринимать как управляющий вход, на который можем подавать любые управляющие воздействия. Описанное множество ячеек с одним управляющим входом будем называть *экраном*.

Формально *экраном* называется клеточный автомат

$$S = (\mathbb{N}, E_n, V = \{-1, 1\}, \varphi, M),$$

где n — число состояний ячейки клеточного автомата, а $\varphi : E_n^3 \to E_n$ — локальная функция переходов, M — множество меток, $M \subset E_n$, $0 \notin M$. Если ячейка находится в состоянии из M, то неформально считаем, что она окрашена в черный цвет, иначе она окрашена в белый цвет. Переменную x_{-1} локальной функции переходов ячейки, соответствующей числу 1, (*самой левой ячейки*) назовем *управляющим входом экрана* S.

Законом движения назовем бесконечную последовательность (сверхслово) из нулей и единиц. Если $F = f_1, f_2, f_3, \ldots$ — закон движения, то через $F(t)$ обозначим t-й элемент последовательности, т.е. $F(t) = f_t$.

Будем говорить, что *на экране S реализуется движение точки по закону F*, если выполняются следующие условия:

1) в некоторый момент времени в самой левой ячейке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток), этот момент будем называть *моментом начала движения* или *началом движения*;

2) изменение позиции метки на экране в t-й момент от начала движения соответствует t-й букве в сверхслове F, а именно, если $F(t) = 0$, то в $(t+1)$-й момент метка остается в той же ячейке, где была в текущий момент, если $F(t) = 1$, то в $(t+1)$-й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, по сравнению со своим текущим положением;

3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Экран S будем называть *универсальным для множества законов движения* $\mathcal{F}$, если для любого F из $\mathcal{F}$ существует такая управляющая последовательность, подаваемая на управляющий вход экрана, что на экране реализуется движение точки по закону F .

Через $\mathcal{F}^s$ обозначим множество таких законов движения F, в которых не встречается более чем s единиц подряд.

В работе [11] доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *Для любого экрана S существует такой закон движения $F \in \{0,1\}^\infty$, что на экране S невозможно реализовать движение точки по закону F.*

Теорема 2. *Существует закон движения $F \in \{0,1\}^\infty$, движение по которому невозможно реализовать ни на каком экране S.*

Теорема 3. *Существует универсальный экран с $2s+2$ состояниями для множества законов движения $\mathcal{F}^s$.*

Вопрос описания множества всех реализуемых законов движения остается открытым, хотя в работе Г.В.Калачева и Е.Е.Титовой [12] сделаны существенные продвижения в этом направлении.

Приведем клеточный автомат с локаторами, который решает задачу однонаправленного движения точки на луче.

Рассмотрим следующий клеточный автомат с локаторами

$$\sigma_1 = (\mathbb{N}, E_2, V = \{-1, 1\}, E_2, \vee, L = \{\Omega\}, \varphi, \psi, M = \{1\}),$$

где $\vee$ — дизъюнкция, взятая в качестве определяющей операции на полугруппе сигналов $E_2 = \{0,1\}$, шаблон локаторов состоит из одного полного телесного угла Ω, множество меток состоит из одного символа 1, функция вещания ψ тождественно нулевая, локальная функция переходов принимает значение 1 только в двух случаях: если ячейка находится в состоянии 1 и сигнал эфира равен 0, или если ячейка слева находится в состоянии 1 и сигнал эфира равен 1, т.е. $\varphi(x_0, x_{-1}, x_1, z_\Omega) = x_0 \& \bar{z}_\Omega \vee x_{-1} \& z_\Omega$.

Будем считать, что переменная x_{-1} локальной функции переходов самой левой ячейки является управляющим входом. Кроме того, будем считать, что в качестве управляющих воздействий можно посылать в эфир сигналы из E_2.

Легко видеть, что, чтобы начать движение, надо на управляющий вход подать 1, а также послать 1 в эфир. В результате на экране в самой левой ячейке появится метка. Далее, чтобы реализовать закон движения F, надо в момент t посылать в эфир значение $F(t)$.

Тем самым, с помощью клеточных автоматов с локаторами можно реализовать любой закон движения, причем число состояний этого автомата равно 2, и мощность алфавита эфира равна 2.

Фактически с помощью сигналов в эфир мы даем команды точке, двигаться ей или стоять.

5. Построение кратчайшего пути

Задача построения кратчайшего пути для клеточных автоматов звучит следующим образом. В начальной конфигурации имеются только две ячейки в активном состоянии, которые назовем начальными точками. Кратчайший путь считается построенным, если с какого-то момента конфигурация становится стабильной, и активные ячейки этой конфигурации образуют кратчайший путь между начальными точками.

В работе [13] приводится адаптация традиционного решения этой задачи к клеточным автоматам. Такое решение предполагает наличие трех этапов в решении:

1) Распространение расширяющегося сигнала от одной из начальных точек. При расширении каждая ячейка запоминает откуда к ней пришел сигнал. Это позволит в дальнейшем осуществить обратный ход.

2) Когда волна достигает второй начальной точки осуществляется обратный ход, приводящий к первой точке, который и дает кратчайший путь.

3) Одновременно запускается волна очищения (приведения в состояние покоя) всех ячеек, кроме ячеек пути. Чтобы эта волна догнала расширяющуюся волну, расширяющаяся волна с первого этапа должна расширяться с половинной скоростью, а волна третьего этапа с единичной скоростью.

В работе [13] утверждается, что предложенный авторами автомат имеет 14 состояний. В этой работе не оценивается время построения пути, но не сложно понять, что оно не меньше, чем $6n$, где n — расстояние по Манхэттену между начальными точками. Здесь $2n$ тактов необходимо первому этапу, и $4n$ тактов третьему. Можно несколько ускорить процесс, пустив расширяющуюся волну из обоих начальных точек, но понятно, что все равно время построения пути будет пропорционально расстоянию между начальными точками.

Теперь рассмотрим решение этой задачи клеточными автоматами с локаторами.

Рассмотрим следующий клеточный автомат с локаторами

$$\sigma_2 = (\mathbb{Z}^2, E_2, V = \{(-1,0),(0,1),(1,0),(0,-1)\},\\ E_2, \vee, L = \{(-1,0),(0,1),(1,0),(0,-1)\}, \varphi, \psi),$$

где $\vee$ — дизъюнкция, взятая в качестве определяющей операции на полугруппе сигналов $E_2 = \{0,1\}$, шаблон соседства “крест”, шаблон локаторов состоит из четырех лучей, направленных влево, вверх, вправо и вниз, функция вещания ψ принимает значение 1, если ячейка в состоянии 1 и имеет место один из четырех случаев: если все ее соседи в состоянии 0; у нее нет соседа сверху в состоянии 1 и верхний локатор получает сигнал 1; у нее нет соседа слева в состоянии 1 и левый локатор получает сигнал 1; у нее нет соседа справа в состоянии 1 и правый локатор получает сигнал 1; т.е.

$$\psi(x_0, x_{-1,0}, x_{0,1}, x_{1,0}, x_{0,-1}, z_{-1,0}, z_{0,1}, z_{1,0}, z_{0,-1}) =\\ = x_0(\bar{x}_{-1,0}\bar{x}_{0,1}\bar{x}_{1,0}\bar{x}_{0,-1} \vee \bar{x}_{0,1}z_{0,1} \vee \bar{x}_{-1,0}z_{-1,0} \vee \bar{x}_{1,0}z_{1,0});$$

локальная функция переходов принимает значение 1, если ячейка была в состоянии 1, или если одновременно пришли сигналы из эфира на одну из четырех пар локаторов: верхний и правый, верхний и левый, верхний и нижний, левый и правый, т.е.

$$\varphi(x_0, x_{-1,0}, x_{0,1}, x_{1,0}, x_{0,-1}, z_{-1,0}, z_{0,1}, z_{1,0}, z_{0,-1}) =\\ = x_0 \vee z_{0,1}z_{1,0} \vee z_{0,1}z_{-1,0} \vee z_{0,1}z_{0,-1} \vee z_{-1,0}z_{1,0}.$$

Покажем, что приведенный выше клеточный автомат с локаторами решает задачу построения кратчайшего пути.

В начальный (нулевой) такт на плоскости только две активные ячейки, которые называем начальными.

Рассмотрим различные случаи расположения начальных ячеек.

Случай 1. Начальные ячейки расположены на одной горизонтали. Левую начальную ячейку обозначим через A, а правую — через B.

Случай 1.1. Если начальные ячейки соседние, то эта пара ячеек и составляет кратчайший путь. Осталось заметить, что сигналы в эфир не появятся, следовательно, не появятся новые активные ячейки, и, значит, конфигурация останется стабильной.

Случай 1.2. Если начальные ячейки не соседние, то функция вещания каждой из начальных ячеек станет равной 1, поскольку у этих ячеек нет соседей. Следовательно, на такте 1 в эфир от ячеек A и B пойдет сигнал, и для всех ячеек между ячейками A и B левые и правые локаторы получат сигналы. Значит, локальные функции переходов этих ячеек примут значение 1. Следовательно, на такте 2 все ячейки между A и B перейдут в состояние 1. Кратчайший путь построен. Поскольку у всех ячеек есть соседи, функция вещания всех ячеек примет значение 0, и возникшая конфигурация останется стабильной.

Случай 2. Начальные ячейки расположены на одной вертикали. Этот случай доказывается аналогично случаю 1.

Случай 3. Начальные ячейки находятся в общем положении. Мысленно проведем через начальные ячейки вертикальные и горизонтальные линии. Получаем воображаемый прямоугольник со сторонами параллельными осям координат, в двух диагональных вершинах которого расположены начальные ячейки.

Случай 3.1. Одна начальная ячейка расположена в левом верхнем углу прямоугольника (обозначим ее через A), а вторая — в правом нижнем (обозначим ее через B).

Поскольку у начальных ячеек нет соседей, то функция вещания этих ячеек примет значение 1. Следовательно, на на такте 1 в эфир от ячеек A и B пойдет сигнал. Ячейка, расположенная в левом нижнем угле прямоугольника (обозначим ее через C) получит сигналы от верхнего и правого локаторов. Поэтому ее локальная функция переходов примет значение 1. Значит, на такте 2 ячейка C станет активной.

Случай 3.1.1. Ячейка C является соседней и для A, и для B. Следовательно, кратчайший путь построен. У всех ячеек есть соседи, следовательно, сигналы в эфир больше подаваться не будут, и конфигурация останется стабильной.

Случай 3.1.2. Ячейка C не является соседней для A, и является соседней для B. Тогда функция вещания ячейки C примет значение 1. Следовательно, на такте 3 в эфир пойдут сигналы от двух ячеек: A и C. Значит, все ячейки между A и C получат сигналы на свои верхние и нижние локаторы. Следовательно, их локальная функция переходов примет значение 1. Следовательно, на такте 4 все ячейки между A и C станут активными. Теперь у всех ячеек есть соседи, следовательно, сигналы в эфир больше подаваться не будут, и конфигурация останется стабильной.

Случай 3.1.3. Ячейка C является соседней для A, и не является соседней для B. Этот случай доказывается аналогично случаю 3.1.2.

Случай 3.1.4. Ячейка C не является соседней ни для A, ни для B. Тогда функция вещания ячейки C примет значение 1. Следовательно, на такте 3 в эфир пойдут сигналы от трех ячеек: A, B и C. Значит, все ячейки между A и C получат сигналы на свои верхние и нижние локаторы, а все ячейки между B и C получат сигналы на свои левые и правые локаторы. Следовательно, локальная функция переходов всех этих ячеек примет значение 1. Следовательно, на такте 4 все ячейки между A и C и между B и C станут активными. Кратчайший путь построен. У всех ячеек есть соседи, следовательно, сигналы в эфир больше подаваться не будут, и конфигурация останется стабильной.

Случай 3.2. Одна начальная ячейка расположена в левом нижнем углу воображаемого прямоугольника, а вторая — в правом верхнем. Этот случай доказывается аналогично случаю 3.1.

Таким, образом мы показали, что предлагаемый клеточный автомат с локаторами позволяет построить кратчайший путь не более чем за 4 такта. При этом у него только 2 состояния и 2 сигнала вещания.

Список литературы

[1] Дж. фон Нейман, *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, Москва, 1971.

[2] Neumann J., von, *Collected works*, New York, 1961 – 1963.

[3] Neumann J., von, *Theory of self-reproducing automata*, London, 1966.

[4] Burks A., *Essays on Cellular Automata*, University of Illinois Press, 1971.

[5] Мур Э. Ф., “Математические модели самовоспроизведения”, *В кн.: Математические проблемы в биологии*, 1966.

[6] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А., *Основы теории однородных структур*, Наука, Москва, 1990.

[7] Arrighi P., “An overview of Quantum Cellular Automata”, *arXiv:1904.12956v2 [quant-ph] 6 Sep 2019*, September 9, 2019, 1–23.

[8] Li W., “Phenomenology of Non-local Cellular Automata”, *Stat. Phys.l*, **68**:5/6 (1992), 829-882.

[9] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А. С., *Теория интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвертая. Теория автоматов.*, Издательские решения, Москва, 2018.

[10] Moore F.R., Langdon G.G., “A generalized firing squad problem”, *Information and Control*, **12**:3 (March 1968), 212–220.

[11] Титова Е.Е., “Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **18**:1 (2014), 153–180.

[12] Калачев Г.В., Титова Е.Е., “О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:3 (2018), 105–125.

[13] Hochberger C., Hoffmann R., “Solving routing problems with cellular automata”, *Proceedings of the Second Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, Octber 1996, 89–98.

Celluar automata with locators

Gasanov E.E.

This article introduce new type of math object — cellular automaton with locators. It was created by implementing new functionality for automaton - broadcasting “on-air” signals and retrieving generalized “on-air” signal from all elementary automata. This article highlights some tasks whose solution will be greatly simplified by using cellular automaton with locators instead of traditional cellular automata.

Keywords: cellular automata, homogeneous structures, firing squad problem, motion picture design, constructing the shortest path.