

Сложность синтеза многомерных прямоугольных схем

Сытдыков Т. Р.

В данной статье рассматривается модель прямоугольных многомерных схем. Элементы схем расположены в ячейках d -мерной прямоугольной решетки. Каждая пара соседних ячеек решетки соединена шиной, в которой может быть до k проводов. Доказана верхняя оценка функции Шеннона для сложности данного вида схем $\frac{2^n}{\min(n, d \log k)}$.

Ключевые слова: многомерные схемы, многослойные схемы, асимптотика функции Шеннона, сложность схем.

1. Введение

Задача синтеза схем, вычисляющих булевы функции и обладающих в некотором смысле оптимальными или субоптимальными характеристиками, возникла в середине XX века в связи с бурным развитием вычислительной техники. С 1950-х гг. одной из наиболее интенсивно исследуемых моделей схем являются схемы из функциональных элементов (СФЭ). Одной из естественных характеристик оптимальности СФЭ является сложность — количество функциональных элементов в схеме. Соответственно, сложность булевой функции можно определить как минимальную сложность схемы, реализующей данную функцию. Маллер в [16] показал, что для любой булевой функции от n переменных порядок ее сложности не превосходит $\frac{2^n}{n}$. Лупанов в [13] доказал, что для почти всех булевых функций от n переменных сложность в стандартном базисе $\{\vee, \&, \neg\}$ асимптотически равна $\frac{2^n}{n}$. Также Лупанов получил асимптотические оценки сложности булевых функций для произвольного конечного базиса.

На практике, однако, при синтезе схем необходимо учитывать такие моменты, как расположение функциональных элементов в пространстве, разводку проводов и др. В 1960-х гг. появились работы, в которых рассматривались модели схем, в той или иной степени учитывающие эти

факторы. Коршунов в [11] получил оценки сложности для случая СФЭ, размещенных в трехмерном пространстве с ограниченными снизу расстояниями между элементами и проводами, а также ограниченными сверху длинами проводов. Кравцов в [10] рассматривал плоские схемы, элементы которых определенным образом размещены в клетках прямоугольной решетки, и получил порядок функции Шеннона 2^n . Модели клеточных схем, аналогичные или идентичные модели Кравцова, рассматривались в ряде более поздних работ. Так, Альбрехт в [1] показал, что асимптотика функции Шеннона для клеточных схем имеет вид $c \cdot 2^n$, где c — некоторая константа, зависящая от базиса. Грибок в [3] получил асимптотику функции Шеннона 2^n для определенного базиса клеточных элементов. Калачев в [5, 6, 7, 8, 9] исследовал одновременную минимизацию сложности и других характеристик плоских схем (мощность и глубина). Ефимов в [2] изучал энергопотребление объемных схем.

Оценки порядка и асимптотики сложности, полученные для перечисленных выше моделей плоских или объемных схем, превосходят по порядку оценку Лупанова $\frac{2^n}{n}$ сложности для СФЭ. В связи с этим интерес представляет задача обобщения модели плоских либо пространственных схем определенным образом так, чтобы, с одной стороны, уменьшить порядок функции Шеннона, с другой стороны, оставить модель в некотором смысле естественной, приближенной к реально существующим схемам.

В данной статье исследуется один из вариантов подобного обобщения модели клеточных схем. Рассматриваются СФЭ над базисом $P_2(2)$, элементы которых размещены в ячейках d -мерной целочисленной решетки, где $d \geq 2$. При этом в каждой ячейке может быть расположено не более одного функционального элемента СФЭ, реализующего нетождественную функцию. Кроме того, каждая пара соседних ячеек соединена шиной, состоящей из не более чем k проводов. Таким образом, прямоугольные многомерные схемы представляют собой семейство моделей схем с двумя параметрами — d и k .

В [14] была получена асимптотика функции Шеннона сложности для случая $d = 2$, а также доказана нижняя оценка для более общей модели k -слойных схем с планарным носителем. В данной статье для $d \geq 2$ будет получена верхняя оценка функции Шеннона сложности прямоугольных многомерных схем при $k \rightarrow \infty$.

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. Г. В. Калачеву за научное руководство, постановку задачи и ценные замечания, а также д.ф.-м.н. профессору Э. Э. Гасанову за помощь в работе.

2. Основные определения, постановка задачи и результаты

2.1. Схемы, их укладки и технологические ограничения

Согласно [15, с. 148], схема из функциональных элементов (далее СФЭ) в базисе $B \subseteq P_2$ представляет собой размеченный ациклический ориентированный граф. Разметка вершин определяет, какие вершины являются входными или выходными, и всем вершинам, не являющимся входными, сопоставляет булевы функции из базиса B . Ребра СФЭ помечены натуральными числами, и разметка входных ребер вершины определяет порядок аргументов в функции, реализуемой данной вершиной.

Для СФЭ S через $G(S)$ обозначим граф, полученный из СФЭ удалением разметки, а через $V(S)$ и $E(S)$ обозначим соответственно множества вершин и ребер СФЭ.

Носителем будем называть произвольный непустой граф с конечным или счетным числом вершин.

Для удобства будем считать, что

- все вершины всех СФЭ принадлежат некоторому множеству \mathcal{V}_S , а ребра — множеству \mathcal{E}_S ;
- все вершины всех носителей принадлежат некоторому множеству \mathcal{V}_T , а ребра — множеству \mathcal{E}_T ;
- разметка вершин и ребер СФЭ обозначается через $\ell(x)$, где x — вершина или ребро СФЭ.

Укладкой СФЭ S на носитель T будем называть произвольный гомоморфизм $h: G(S) \rightarrow T$.

Схемой с носителем T будем называть пару $K = (S, h)$, где S — схема из функциональных элементов, а h — ее укладка на T . Множество схем с носителем T обозначим через $\mathcal{C}(T)$. Элементами (вершинами) схемы будем называть элементы образа $h(V(S))$. Множество элементов будем обозначать через $V(K)$, а также через $V(S, h)$. Для краткости будем говорить «схема» вместо «схема с носителем» в тех случаях, когда это не приведет к разночтениям.

Будем говорить, что схема $K = (S, h)$ *реализует* булеву функцию или булев оператор f , если соответствующая СФЭ S реализует f .

Обычно в задачах синтеза схем имеются те или иные ограничения на укладку. Такие ограничения задают подмножество допустимых укла-

док. Ограничения могут формулироваться как для конкретного носителя, так и для класса носителей. Для упрощения определения операций над ограничениями формально можно считать, что ограничения всегда относятся ко всем носителям, но для некоторых носителей множество укладок пусто.

Итак, ограничение (глобальное) на укладку представляет собой функцию U , которая паре (S, T) ставит в соответствие некоторое множество $U(S, T) \subseteq \text{Hom}(G(S), T)$ допустимых укладок S в T , где S — СФЭ, T — носитель.

Важным классом ограничений являются технологические (локальные) ограничения. Ограничение на укладку называется *технологическим (локальным)*, если оно может быть описано в терминах ограничения на прообраз вершин и ребер носителя. Формально, локальное ограничение задается парой предикатов (p_V, p_E) , где $p_V : 2^{V^S} \rightarrow \{0, 1\}$, $p_E : 2^{E^S} \rightarrow \{0, 1\}$. Локальное ограничение $U = (p_V, p_E)$ задает глобальное ограничение U' :

$$U'(S, T) = \left\{ h \in \text{Hom}(S, T) \mid \begin{array}{l} \forall v \in h(V(S)) \ p_V(h^{-1}(v)), \\ \forall e \in h(E(S)) \ p_E(h^{-1}(e)) \end{array} \right\}.$$

Введем несколько базовых локальных ограничений.

- Ограничение на базис:

$$bs(B) = (p_B, \top), \quad p_B(s) \Leftrightarrow \forall v \in s \ (\ell(v) \in B),$$

которое выражает свойство «любая вершина из прообраза реализует функцию из множества B ». Здесь и далее \top означает тождественно истинный предикат.

- Ограничение на число проводов, идущих по одному ребру:

$$wt_e(k) = (\top, p_E), \quad p_E(s) \Leftrightarrow |s| \leq k,$$

которое выражает свойство «в каждое ребро носителя может отображаться не более k ребер СФЭ».

- Аналогичное ограничение на число нетождественных элементов в вершине:

$$wt_f(k) = (p_V, \top), \quad p_V(s) \Leftrightarrow |\{v \in s \mid \ell(v) \neq I_1^1\}| \leq k.$$

Здесь I_1^1 — тождественная булева функция.

Для локальных ограничений можно покомпонентно определить булевы операции. Например,

$$(p_V^1, p_E^1) \& (p_E^2, p_E^2) := (p_V^1 \& p_V^2, p_E^1 \& p_E^2);$$

2.2. Модели схем

Моделью схем будем называть пару $M = (T, U)$, где T — носитель, U — ограничение на укладку.

Будем говорить, что схема (S, h) *соответствует модели схем* $M = (T, U)$, если T является носителем схемы и $h \in U(S, T)$. Множество схем, соответствующих модели M , будем обозначать через $\mathcal{C}(M)$; также будем использовать словосочетание «схема в модели M » для любой схемы из $\mathcal{C}(M)$.

Основная часть данной работы будет главным образом посвящена изучению некоторых свойств модели схем, определенной ниже — прямоугольных многомерных схем.

Прямоугольные многомерные схемы. Пусть $d \geq 2$ — целое положительное число. Рассмотрим граф d -мерной целочисленной решетки \mathbb{Z}^d , в котором вершины смежны тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно 1 (для краткости будем обозначать данный граф также через \mathbb{Z}^d). Определим модель прямоугольным многомерных схем $M_k^d = (\mathbb{Z}^d, U_k)$, где

$$U_k = wt_e(k)bs(P_2(2))wt_f(1).$$

Здесь базис $P_2(2)$ есть множество всех булевых функций от двух переменных. Для простоты в качестве функций базиса мы будем использовать и булевы функции от одной переменной, подразумевая при этом, что используется соответствующая функция от двух переменных с отождествленными входами.

Таким образом, в каждое ребро прямоугольной многомерной схемы может быть отображено не более k ребер исходной СФЭ, а в каждую вершину — не более одного элемента СФЭ, реализующего нетождественную функцию.

Далее мы будем использовать сокращение *схемы* для прямоугольных многомерных схем в тех случаях, когда это не вызовет разночтений.

2.3. Сложность схем

Для схемы $K = (S, h)$ подмножество носителя $h(V(S))$ будем называть *образом* схемы K .

Под *сложностью* схемы будем понимать количество вершин ее образа. Для сложности схемы K будем использовать обозначение $L(K)$.

Множество всех схем в модели M , реализующих булеву функцию или оператор f , обозначим через $\mathcal{C}(M, f)$.

Пусть f — булева функция, M — модель схем. Определим сложность функции f в модели M :

$$L(M, f) := \min_{K \in \mathcal{C}(M, f)} L(K).$$

В случае, если не существует схемы в модели M , реализующей f , будем формально считать, что $L(M, f) = \infty$.

Введем функцию Шеннона сложности реализации булевых функций в модели M :

$$L(M, n) := \max_{f \in P_2(n)} L(M, f),$$

где $P_2(n)$ — множество булевых функций от n переменных.

2.4. Соглашения при изображении схем

В процессе доказательства будет необходимо изображать укладки схем и другие конструкции.

В двумерном случае будем стараться рисовать укладки максимально приближенно к изображениям клеточных схем, принятым в литературе, например в [10, 6]. Границы между клетками схем будем изображать пунктирными линиями, соединения между элементами — сплошными линиями с, возможно, стрелками, поясняющими ориентацию соответствующих ребер СФЭ.

Как и принято в литературе, будем называть линии соединений проводами, их параллельную группу — шиной, число проводов в шине — ее толщиной. Для простоты будем опускать элемент тождественной функции, соединяя его вход и выход в один непрерывный провод. Таким образом, провода в изображениях схем могут соединять элементы, расположенные в удаленных друг от друга ячейках решетки. Для удобства будем изображать шину одной толстой линией вместо группы из нескольких тонких.

2.5. Прочие обозначения и соглашения

Выражение $\log a$ всюду будет обозначать двоичный логарифм a вместо десятичного.

2.6. Полученные результаты

В данной статье для прямоугольных многомерных схем будет доказана верхняя оценка функции Шеннона $L(M_k^d, n)$.

$$L(M_k^d, n) \lesssim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

3. Верхняя оценка функции Шеннона

В данном разделе будет получена верхняя оценка функции Шеннона для модели прямоугольных d -мерных схем:

$$L(M_k^d, n) \lesssim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Во всех утверждениях этого раздела в отсутствии каких-либо ограничений на d будем считать, что $d \geq 2$. Для различения вершин графа носителя, графа СФЭ и вспомогательных графов, которые будут использованы при доказательствах, вершины графа d -мерной решетки будем также называть *ячейками*.

Будем использовать несколько вспомогательных лемм. Предварительно введем следующее определение.

Пусть T — некоторый носитель, G — некоторый мультиграф, такой, что $V(G) \subseteq V(T)$. Пусть $Path(T)$ — множество путей в T . Под *разводкой проводов графа G в модели M_k^T* будем понимать отображение $h: E(G) \rightarrow Path(T)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- Если $e_g = \{a, b\} \in E(G)$, то $h(e_g)$ — некоторый путь, соединяющий вершины a и b .
- Если $e_t \in E(T)$, то количество путей, являющихся образами ребер графа G и проходящих через e_t (с учетом кратности), не превосходит k .

Для краткости мы будем говорить о *разводке проводов* без упоминания графа и модели схем, если из контекста ясно, о каких графе и модели схем речь.

Неформально, для укладки СФЭ S на носитель T разводка проводов в модели M_k^T соответствует некоторому способу провести провода схемы без ветвлений при фиксированном размещении функциональных элементов в вершинах носителя. Таким образом, для обоснования корректности разводки в общем случае ключевым моментом будет доказательство соответствия разводки локальному ограничению $wt_e(k)$. Как будет показано при доказательстве следующей леммы, с помощью введенного определения будет удобно строить разводки проводов более общих, чем СФЭ, конструкций.

Лемма 1. Пусть k — целое положительное число, T — граф d -мерного куба со стороной l , G — граф с вершинами куба T , степени вершин которого ограничены константой $a \geq 5$. Пусть выполнено соотношение

$$l \leq \frac{k}{a \cdot 1.6^{d-2}}. \quad (1)$$

Тогда существует разводка проводов графа G в модели M_k^T .

Доказательство. Будем строить требуемую разводку индукцией по размерности куба.

База индукции. Пусть $d = 2$. Построим разводку в квадрате так, как показано на рис. 1. Черными кружками в каждой ячейке символически показаны концы ребер графа G .

Ориентируем ребра графа G произвольным образом. Объединим провода, соответствующие началам ребер, по строкам квадрата в горизонтальные шины. Аналогично объединим провода, соответствующие концам ребер, по столбцам квадрата в вертикальные шины. Соединим соответствующие провода из горизонтальных и вертикальных шин (на рисунке это показано соединяющими шины проводами в левой верхней части ячеек), получим искомую разводку.

Ясно, что в такой конструкции в каждое ребро куба будет уложено не более $a \cdot l$ проводов. Согласно (1), $l \leq \frac{k}{a \cdot 1.6^{d-2}}$, что при $d = 2$ дает $a \cdot l \leq k$. Таким образом, локальное ограничение $wt_e(k)$ будет соблюдено.

Шаг индукции. Пусть $d > 2$. Основная идея построения разводки для куба размерности d — сведение исходной задачи к нескольким подзадачам для куба размерности $d - 1$. Для этого сгруппируем в шины провода, которые должны быть проведены в ячейках куба, лежащих в одном «столбике» (т. е. ячейках куба, у которых значения всех координат, кроме одной выделенной, совпадают — см. рис. 2). Тогда, если мы сможем развести провода между построенными шинами в l кубах размерности

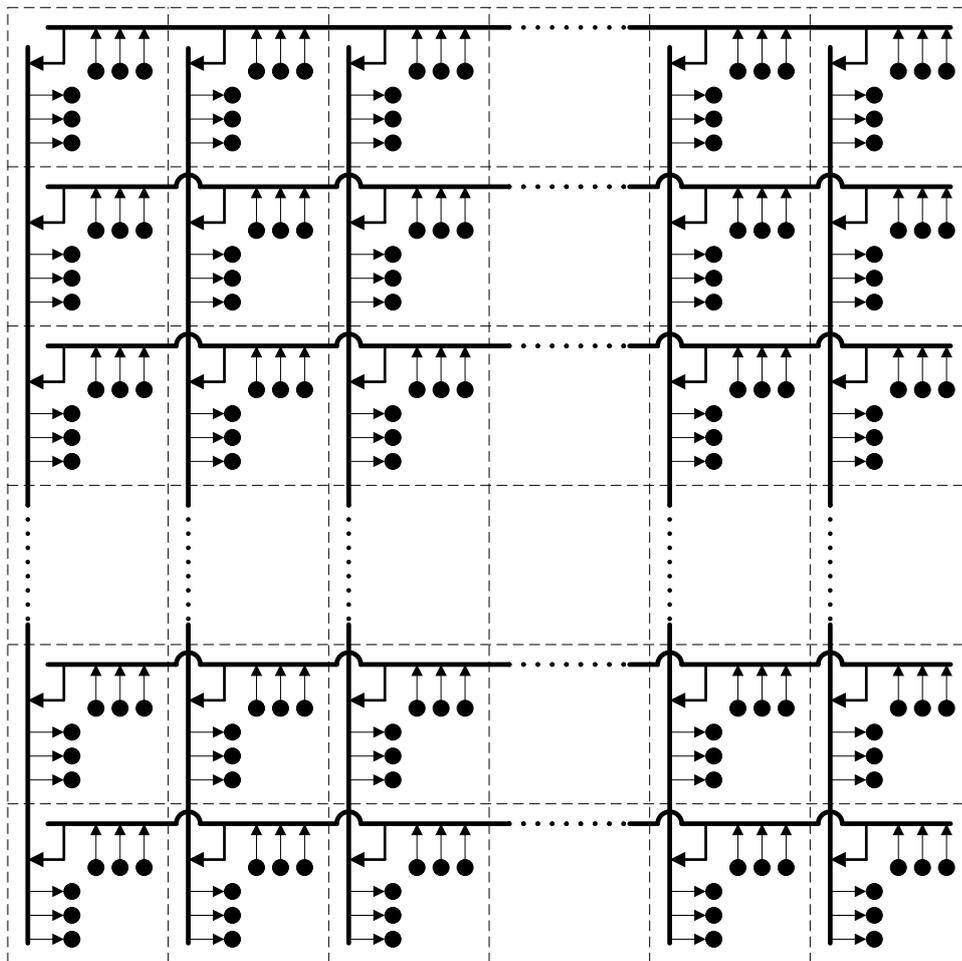


Рис. 1. Разводка проводов в двумерном случае.

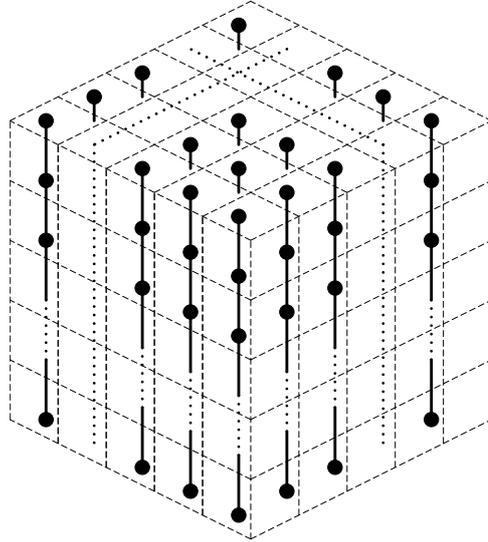


Рис. 2. Группирование проводов в шины вдоль одной из размерностей d -мерного куба.

$d - 1$, соответствующих «слоям» исходного куба вдоль выделенной координатной оси (рис. 3), то получим разводку проводов для d -мерного куба.

Рассмотрим граф $d - 1$ -мерного куба G' , получающийся из графа куба G путем слияния вершин, у которых совпадают все координаты, кроме одной выделенной (например, первой), и отбрасывания возникших при слиянии петель. Ясно, что в G' степень каждой вершины не будет превосходить $a \cdot l$.

Физически такое слияние будет соответствовать описанному выше объединению в одну шину всех проводов, соответствующих l ячейкам куба, которые были объединены при слиянии. Очевидно, что петли, возникшие при слиянии вершин, соответствуют случаю, когда провод соединил нужные две вершины через шину. Ясно, что эти провода можно не рассматривать дальше, поэтому при переходе от G к G' петли были отброшены. В силу (1) получим $a \cdot l \leq k$. Поскольку в каждой шине будет не более $a \cdot l \leq k$ проводов, локальное ограничение $wt_e(k)$ не будет нарушено.

Покажем, как перейти к подзадачам меньшей размерности. Согласно теореме Шеннона о реберной раскраске [17], любой мультиграф, степени

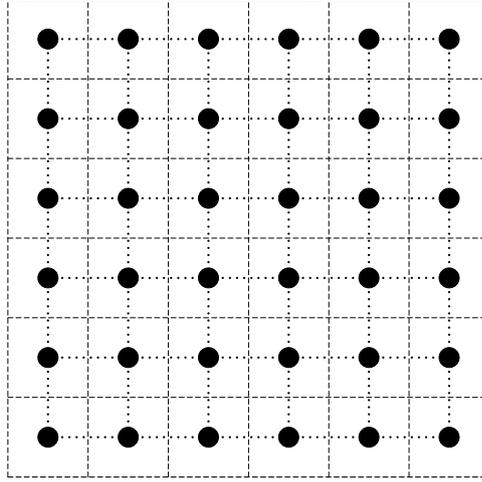


Рис. 3. Разводка проводов в кубе меньшей размерности.

вершин которого не превосходят некоторого числа q , имеет правильную реберную раскраску не более чем в $\frac{3}{2}q$ цветов. В частности, поскольку у мультиграфа G' степень вершин ограничена числом $a \cdot l$, то существует правильная реберная раскраска G' не более чем в $\frac{3}{2}a \cdot l$ цветов. Будем укладывать в каждый из l кубов размерности $d - 1$ ребра в соответствии с раскраской — не более чем по $\lceil \frac{3}{2}a \rceil$ цветов на каждый из l кубов.

Итак, получены подзадачи, где куб имеет размерность $d - 1$ и степень каждой вершины ограничена числом $a' = \lceil \frac{3}{2}a \rceil$. По условию леммы, $a \geq 5$, откуда $a' \leq 1.6a$. Согласно (1), $l \leq \frac{k}{a \cdot 1.6^{d-2}}$, откуда $l \leq \frac{k}{a' \cdot 1.6^{d-3}}$. Следовательно, по предположению индукции существует разводка проводов в кубе размерности $d - 1$ и стороной l , степени вершин которого ограничены числом a' . Конструируя такую разводку в каждой из подзадач, получаем разводку проводов для d -мерного куба. \square

Следующая важная лемма впервые была доказана Лупановым [12]. Мы будем использовать ее формулировку из [15]. В качестве базиса СФЭ используются все булевы функции от не более чем двух переменных. Следуя обозначениям из [15], для произвольной булевой функции f примем за $L(f)$ число элементов в минимальной по числу функциональных элементов СФЭ, вычисляющей f .

Лемма 2 ([15], теорема 11.2). Пусть $n \rightarrow \infty$. Тогда для каждой булевой функции, зависящей от n переменных,

$$L(f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right) \right).$$

Метод синтеза СФЭ, использованный в доказательстве леммы 2, известен как метод Лупанова.

Лемма 3. Пусть $d \geq 2$, $m \rightarrow \infty$, $m \leq d \lfloor \log \frac{k}{5 \cdot 1.6^{d-2}} \rfloor$. Тогда для каждой булевой функции f , зависящей от m переменных, существует схема $K(f)$, реализующая f , такая, что ее образ целиком лежит в d -мерном кубе со стороной $l = \sqrt[d]{\frac{2^m}{m}(1 + o(1))}$.

Доказательство. Имеем $m \rightarrow \infty$. По лемме 2 для произвольной функции f от m переменных существует СФЭ S , реализующая f и содержащая не более $N = \frac{2^m}{m}(1 + o(1))$ функциональных элементов. Обозначим

$$l = \lceil \sqrt[d]{N} \rceil,$$

получим

$$l = \lceil \sqrt[d]{N} \rceil = \sqrt[d]{\frac{2^m}{m}(1 + o(1))} \leq \sqrt[d]{\frac{2^{d \lfloor \log \frac{k}{5 \cdot 1.6^{d-2}} \rfloor}}{m}(1 + o(1))},$$

откуда

$$l \leq \frac{k}{5 \cdot 1.6^{d-2}} \sqrt[d]{\frac{1 + o(1)}{m}} \leq \frac{k}{5 \cdot 1.6^{d-2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{k'}{5 \cdot 1.6^{d-2}}, \quad (2)$$

где $k' = \lceil \frac{1}{2}k \rceil$. Покажем, что при таком l можно уложить СФЭ S в d -мерный куб со стороной l .

Разместим функциональные элементы S в ячейки куба произвольным образом. Ясно, что, если мы сумеем провести провода ко входам всех элементов от входов схемы и соответствующих выходов элементов, укладывая не более k проводов в ребра графа d -мерного куба, то будет получена корректная схема в модели M_k^d . Покажем, как это сделать.

Для упрощения задачи подведем провода от всех входов схемы ко всем ячейкам куба, подключив их к входам соответствующих функциональных элементов. Сами входы схемы будем вести от произвольных граничных ячеек куба (для удобного подключения проводов извне схемы). Также проведем провод выхода схемы от выходного элемента к

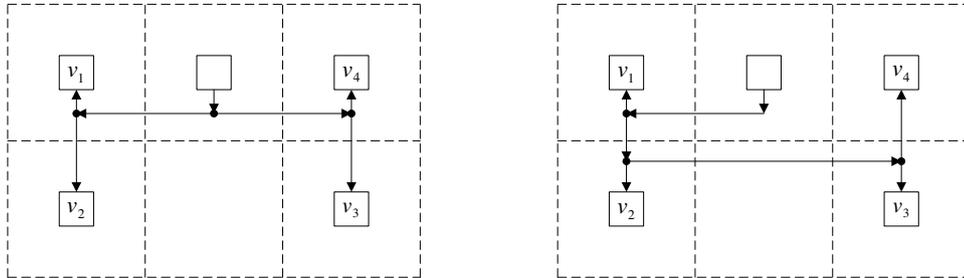


Рис. 4. Преобразование ветвлений провода. Слева — изначальное (произвольное) ветвление, справа — полученное последовательное ветвление провода в целевых ячейках.

произвольной граничной ячейке куба (также для удобного подключения ввне схемы). Легко видеть, что в результате в каждое ребро графа куба будет уложено не более $m + 1$ проводов. По условию леммы, $m \rightarrow \infty$ и $m \leq d \lfloor \log \frac{k}{5.1.6^{d-2}} \rfloor$, откуда $m + 1 \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = k - k'$. Поэтому для получения корректной укладки S в куб достаточно провести остальные провода (между функциональными элементами S) с соблюдением ограничения $wt_e(k')$.

Для применения леммы 1 о разводке проводов необходимо видоизменить задачу о проведении проводов между функциональными элементами S так, чтобы не было ветвлений проводов и чтобы степени вершин были ограничены. Покажем, как это сделать.

Ясно, что ветвиться будут провода, которые должны быть поданы на вход по крайней мере двум функциональным элементам. Пусть некоторый провод должен быть подключен на входы элементов v_1, v_2, \dots, v_r . Тогда последовательно проведем провод к ячейкам, содержащим элементы v_1, v_2, \dots, v_r , производя ветвления во всех ячейках, кроме последней (пример для $r = 4$ на рис. 4). Поскольку все функциональные элементы реализуют функции не более чем от двух переменных, то в такой конструкции в каждой ячейке куба будет не более двух ветвлений проводов.

Таким образом, исходная задача сводится к следующей: развести провода, соблюдая ограничение $wt_e(k')$, при условии, что в каждой ячейке исходно было не более двух входящих проводов и не более трех исходящих (один провод для выхода функционального элемента и не более двух проводов для ветвлений входов того же элемента). При этом ветвления в середине провода не допускаются, т. е. каждый провод соединяет две заданные ячейки. Фактически требуется построить разводку прово-

дов для графа с вершинами из d -мерного куба со стороной l , степень вершин которого ограничена числом $2 + 3 = 5$.

Поскольку, согласно (2), $l \leq \frac{k'}{5 \cdot 1.6^{d-2}}$, по лемме 1 для $a = 5$ такая разводка проводов будет существовать. Используя ее для соединения проводов функциональных элементов S , получим корректную схему в модели M_k^d , образ которой есть d -мерный куб со стороной l . \square

Лемма 4. Пусть $k \geq 2$. Тогда для любого целого положительного n существует схема K_n , реализующая все конъюнкции от n переменных, образ которой есть прямоугольник длины $2^n + 1$ и высоты n .

Доказательство. Для изображения функциональных элементов схем будем использовать следующие стандартные обозначения (рис. 5).



Рис. 5. Графические обозначения функциональных элементов.

Схема, реализующая все конъюнкции от n переменных, изображена на рис. 6.

Нетрудно видеть, что ограничение $wt_f(1)$ соблюдено, поскольку в каждую клетку схемы уложено не более одного функционального элемента. Ограничение на базис также не нарушается, поскольку все функциональные элементы реализуют либо конъюнкцию, либо отрицание. Наконец, поскольку максимальное количество проводов, пересекающих границу между смежными клетками, равно 2, ограничение $wt_e(k)$ будет выполнено для любого $k \geq 2$.

Высота схемы, очевидно, равна числу входов, т. е. равна n , а длина — количеству выходов плюс 1, что составит $2^n + 1$. \square

Лемма 5. Пусть $k \rightarrow \infty$ и $n \geq d \lceil \log \frac{k}{5 \cdot 1.6^{d-2}} \rceil$. Тогда

$$L(M_k^d, n) \lesssim \frac{2^n}{d \log k}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что при указанных в теореме условиях для произвольной функции f от n переменных существует реализующая схема в модели M_k^d со сложностью, асимптотически не превышающей $\frac{2^n}{d \log k}$.

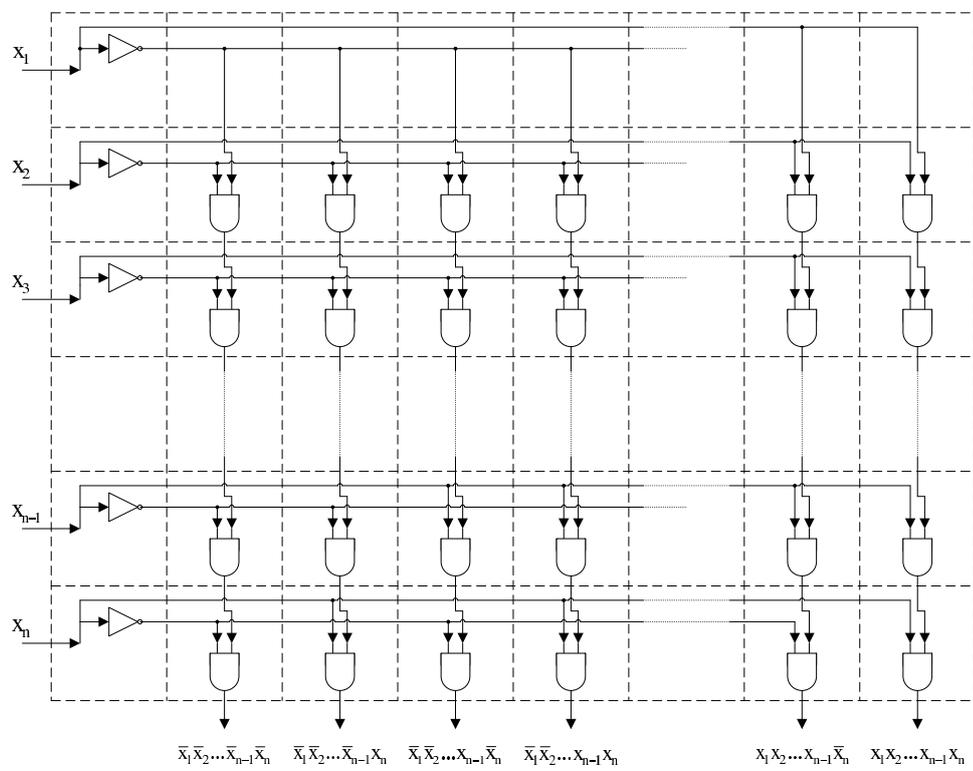


Рис. 6. Схема, реализующая все конъюнкции от n переменных.

Пусть f — произвольная булева функция, зависящая от n переменных. Выделим $m = d \lceil \log_{5.16^{d-2}} k \rceil$ переменных x_1, x_2, \dots, x_m . Оставшиеся $n - m$ переменных разобьем на две примерно одинаковые группы (при малых $n - m$, возможно, пустые) с $a = \lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor$ и $b = \lceil \frac{n-m}{2} \rceil$ переменными соответственно. Разложим функцию по этим $n - m$ переменным:

$$f = \bigcup x_{n-m+1}^{\sigma_{n-m+1}} \dots x_n^{\sigma_n} f_i(x_1, \dots, x_m) \quad (3)$$

Согласно лемме 4, существуют схемы K_A и K_B , реализующие все конъюнкции от a и b переменных соответственно. Рассмотрим, например, схему K_B — ее высота должны составить b , а длина — $2^b + 1$. Легко видеть, что данную схему можно преобразовать, вставив в нее пустые столбцы в произвольные места, получив таким образом схему большей длины с нужными интервалами между выходами.

Согласно лемме 3, произвольная функция от m переменных реализуется схемой, образ которой помещается в d -мерный куб со стороной $l \sim \sqrt[d]{\frac{2^m}{m}}$.

Построенная схема будет размещена в d -мерном параллелепипеде с двумя основными размерностями. Конструктивно она будет состоять из 2^{n-m} d -мерных кубических блоков размера l , реализующих функции f_i из разложения (3), и соединяющих их функциональных блоков, расположенных в двумерной плоскости, соответствующей основным размерностям параллелепипеда. Будем называть эту плоскость *соединяющей*. На рис. 7 показано прямоугольное сечение схемы соединяющей плоскостью.

Покажем, как расположить элементы схемы в указанном прямоугольном сечении. Разместим преобразованные схемы K_A и K_B у левого и верхнего краев прямоугольника. Составим 2^{n-m} схем, реализующих функции f_i из разложения (3), и разместим их в d -мерные кубы так, что их двумерные сечения соединяющей плоскостью будут расположены напротив соответствующих выходов K_A и K_B . Для каждого выхода K_A добавим вспомогательную строку, в которой будем вести два провода — один от выхода K_A , второй для аккумуляции дизъюнктов по строке. Для каждого выхода K_B добавим вспомогательный столбец, в котором будем вести шину с проводами для x_1, \dots, x_m (эту шину будем передавать на входы подсхемам, реализующим f_i), а также провод, соответствующий выходу K_B . Добавим дополнительную строку сверху для подведения шины от входов схемы к столбцам. Также добавим один столбец слева для проведения шины к самым левым подсхемам. Наконец, добавим один вспомогательный столбец справа для аккумуляции дизъ-

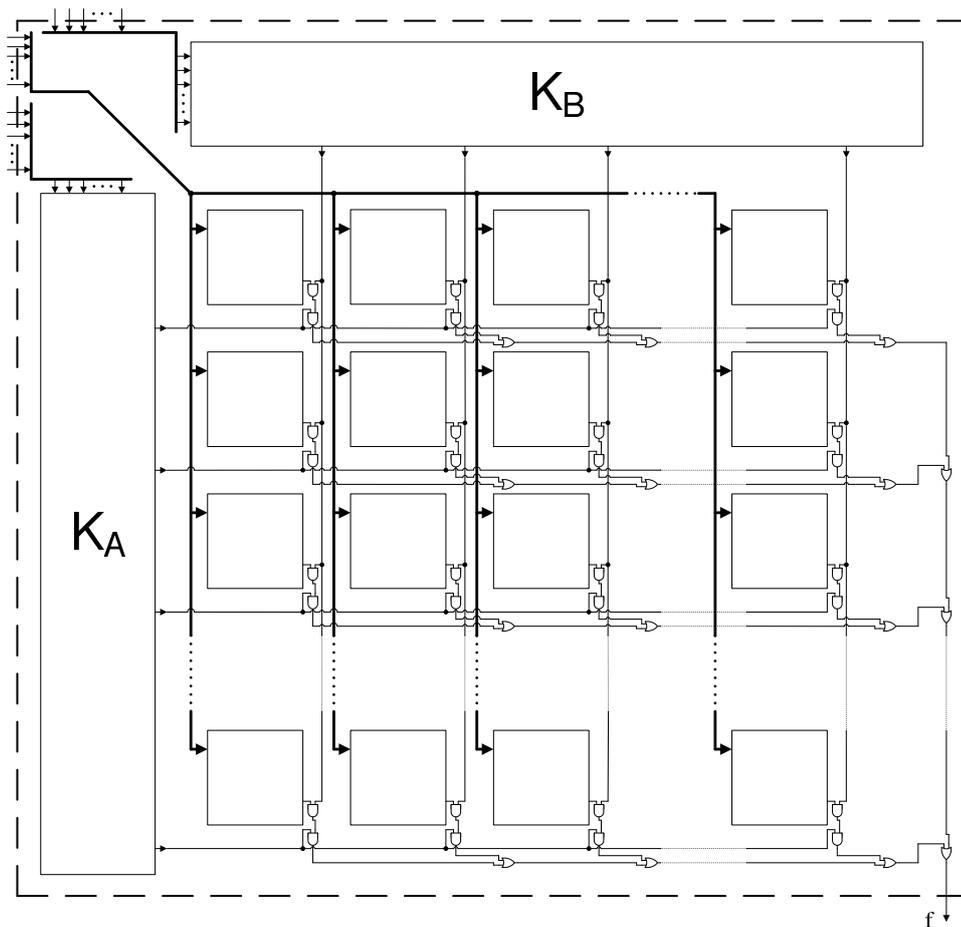


Рис. 7. Схема, реализующая функцию f .

юнктов — на выходе в нижней строке в данном столбце будет получено значение функции f .

Покажем, что при таком построении соблюдены все ограничения модели M_k^d . Внутри подсхем K_A и K_B , а также подсхем, реализующих функции f_i , эти ограничения выполняются в силу лемм 3 и 4. Далее, в верхнем левом углу схемы изображены три шины, собирающие входы схемы в группы — легко видеть, что их можно уложить, не нарушив ограничения $wt_e(k)$ (другие ограничения не будут нарушены в силу отсутствия в той части схемы функциональных элементов). Наконец, в дополнительных строках и столбцах ограничения также соблюдены — для аккумуляции дизъюнктов от каждой подсхемы потребуется три функциональных элемента (две конъюнкции и одна дизъюнкция), которые легко уместить в трех соседних клетках схемы; количество проводов, соединяющих клетки дополнительных столбцов и строк с любой соседней клеткой, не превосходит величины $m + 2 \leq k$ (число проводов шины с m проводами плюс не более двух дополнительных проводов).

Оценим сложность полученной схемы. Для этого вычислим объем соответствующего параллелепипеда. По построению, прямоугольное сечение соединительной плоскости имеет длину

$$a + 1 + 2^b(l + 1) + 1$$

и высоту

$$b + 1 + 2^a(l + 1).$$

Длины параллелепипеда вдоль остальных $d - 2$ размерностей равны длине кубов, реализующих функции f_i , т. е. равны l . Перемножая, получим

$$L(M_k^d, f) \leq (a + 1 + 2^b(l + 1) + 1) \cdot (b + 1 + 2^a(l + 1)) \cdot l^{d-2} \lesssim (a + 2^b l) \cdot (b + 2^a l) \cdot l^{d-2}.$$

Так как a и b различаются не более чем на 1, то

$$L(M_k^d, f) \lesssim 2^{a+b} \cdot l^d.$$

Подставляя значения a, b, l и учитывая, что $a + b = n - m$, получим

$$L(M_k^d, f) \lesssim 2^{n-m} \cdot \frac{2^m}{m} = \frac{2^n}{m}.$$

Наконец, подставляя значение m , получим

$$L(M_k^d, f) \lesssim \frac{2^n}{d \log k},$$

что и требовалось доказать. \square

Теорема 1.

$$L(M_k^d, n) \lesssim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

- 1) $n \geq d \lfloor \log \frac{k}{5 \cdot 1.6^{d-2}} \rfloor$. В этом случае, используя лемму 5, получим

$$L(M_k^d, n) \lesssim \frac{2^n}{d \log k} \sim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)}.$$

- 2) $n < d \lfloor \log \frac{k}{5 \cdot 1.6^{d-2}} \rfloor$. В этом случае для $m = n$ выполнены условия леммы 3. По той же лемме 3 получим

$$L(M_k^d, n) \leq \left(\sqrt[d]{\frac{2^n}{n} (1 + o(1))} \right)^d = \frac{2^n}{n} (1 + o(1)) \sim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)}.$$

Объединяя результаты рассмотренных случаев, получаем утверждение теоремы. \square

Список литературы

- [1] Альбрехт А., “О схемах из клеточных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **33** (1977), 209–214.
- [2] Ефимов А. А., “Верхняя оценка энергопотребления в классе объемных схем”, *Интеллектуальные системы*, **23:1** (2019), 117–132.
- [3] Грибок С. В., “Об одном базисе для схем из клеточных элементов”, *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*, **4** (1999), 36–39.
- [4] Жуков Д. А., “О вычислении частичных булевых функций клеточными схемами”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **1:11 2** (2004), 32–40.
- [5] Калачев Г. В., “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26:1** (2014), 49–74.
- [6] Калачев Г. В., “Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы*, **20:2** (2016), 203–266.
- [7] Калачев Г. В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц”, *Интеллектуальные системы*, **21:1** (2017), 28–96.

- [8] Калачев Г. В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции”, *Интеллектуальные системы*, **21:2** (2017), 163–192.
- [9] Калачев Г. В., “О нижней оценке максимального потенциала плоских схем с несколькими выходами через площадь”, *Интеллектуальные системы*, **22:1** (2018), 111–117.
- [10] Кравцов С. С., “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [11] Коршунов А. Д., “Об оценках сложности схем из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.
- [12] Лупанов О. Б., “О синтезе некоторых классов управляющих систем”, *Проблемы кибернетики*, **10** (1963), 63–97.
- [13] Лупанов О. Б., “Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования”, *Проблемы кибернетики*, **14** (1965), 31–110.
- [14] Сытдыков Т. Р., “Сложность синтеза многослойных клеточных схем”, *Дискретная математика*, **В печати**.
- [15] Чашкин А. В., *Дискретная математика*, Академия, Москва, 2012, 352 с.
- [16] Muller D. E., “Complexity in Electronic Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5 1** (1956), 15–19
- [17] Shannon, Claude E., “A theorem on coloring the lines of a network”, *Math. Physics*, **28** (1949), 148–151

The complexity of multidimensional rectangular circuits design

Sitdikov T. R.

A model of rectangular multidimensional circuits is considered in this paper. Logic gates are placed in cells of d -dimensional mesh. Each pair of adjacent cells is connected by a bus with at most k wires. We establish Shannon function upper bound $\frac{2^n}{\min(n, d \log k)}$ for the complexity of this type of circuits.

Keywords: multidimensional circuits, multilayer circuits, Shannon function asymptotics, circuit complexity.