

Равномерная V -реализуемость принципа Маркова в V -перечислимой области

Коновалов А. Ю.

Определяются различные варианты понятия V -реализуемости для формул языка логики предикатов, основанные на использовании функций из множества V для интерпретации импликации и квантора всеобщности. Устанавливается, что принцип Маркова является слабо V -реализуемым, не является равномерно V -реализуемым и является V -реализуемым равномерно в области M , если множество $M \subseteq \mathbb{N}$ является V -перечислимым.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, абсолютная реализуемость, обобщенная реализуемость, принцип Маркова.

Принцип конструктивного подбора, или *принцип Маркова*, выражаемый предикатной формулой

$$\forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x P(x)), \quad (\text{MP})$$

является одним из основных законов конструктивной логики, отличающим ее от интуиционистской логики. В контексте рекурсивной реализуемости принцип Маркова означает, что формула (MP) является реализуемой, если областью возможных значений переменной x является множество всех натуральных чисел \mathbb{N} . Возможность варьирования предметной области полностью исследована в работе [1]. Там доказано, что формула (MP) реализуема в некоторой области M тогда и только тогда, когда множество M рекурсивно-перечислимо.

В работах [2, 3] определены обобщения понятия рекурсивной реализуемости, в которых вместо индексов частично-рекурсивных функций в качестве реализаций используются индексы частичных функций из более широких классов. Представляет интерес исследовать вопрос о корректности принципа Маркова относительно различных вариантов обобщенной реализуемости.

Пусть V — некоторое счетное множество частичных функций натурального аргумента. Элементы множества V назовем V -функциями. Будем считать, что для каждого натурального числа n имеется нумерация всех n -местных V -функций. А именно, определено множество индексов $I_n^V \subseteq \mathbb{N}$ вместе с отображением, которое каждому натуральному числу $z \in I_n^V$ ставит в соответствие n -местную V -функцию $\varphi_z^{V,n}$, и при этом всякая n -местная V -функция есть $\varphi_z^{V,n}$ для некоторого $z \in I_n^V$. Будем говорить, что натуральное число z есть V -индекс n -местной V -функции φ , если $z \in I_n^V$ и $\varphi = \varphi_z^{V,n}$. При записи выражений вида $\varphi_z^{V,n}(t_1, \dots, t_n)$ обычно будем опускать верхний индекс n . Будем считать, что множество V вместе с вышеописанной нумерацией обладает следующими свойствами:

C1) множество V содержит все частично-рекурсивные функции;

C2) если ψ есть n -местная V -функция, s — перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$, то функция ψ' , определенная условием равенства

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}),$$

является V -функцией;

C3) если ψ есть n -местная V -функция, то функция ψ' , определенная условием равенства

$$\psi'(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi(x_1, \dots, x_n),$$

является V -функцией;

C4) если ψ есть $(n + m)$ -местная V -функция, a_1, \dots, a_m — натуральные числа, то функция ψ' , определенная условием равенства

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m),$$

является V -функцией;

C5) если ψ есть $(n + 1)$ -местная V -функция, то функция ψ' , определенная условием равенства

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu x [\psi(x_1, \dots, x_n, x) = 0],$$

является V -функцией (μ — оператор минимизации);

C6) если ψ есть m -местная V -функция, ψ_1, \dots, ψ_m суть n -местные V -функции, то функция ψ' , определенная условием равенства

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_m(x_1, \dots, x_n)),$$

является V -функцией.

Кроме этого, потребуем эффективного выполнения свойств С2–С6. А именно, будем считать, что существует такая V -функция (своя для каждого из свойств С2–С6), которая по V -индексу функции ψ (V -индексам функций $\psi, \psi_1, \dots, \psi_m$) находит некоторый V -индекс функции ψ' .

Отметим, что свойствам С1–С6 удовлетворяет множество всех частично-рекурсивных функций с подходящей нумерацией. В работах [2, 3] приводятся такие нумерации всех арифметических и всех гиперарифметических функций, что свойства С1–С6 выполняются для соответствующих классов функций.

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \dots, v_n)$, где P есть n -местная предикатная переменная, а v_1, \dots, v_n — предметные переменные, при помощи логических констант \top, \perp , связок $\wedge, \vee, \rightarrow$ и кванторов \forall, \exists .

Пусть M — непустое подмножество натурального ряда. Следуя [4], n -местным обобщенным предикатом на множестве M будем называть всякую функцию типа $M^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A валентности n ставит в соответствие n -местный обобщенный предикат на множестве M . В этом случае отображение f будем называть M -оценкой формулы A . Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения элементов множества M . Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c , которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2 , так что выполняются соотношения $p_1(c(x, y)) = x$ и $p_2(c(x, y)) = y$. В выражениях вида $p_1(t)$, $p_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Для натурального числа e , замкнутой предикатной формулы A расширенного языка и M -оценки f формулы A определим отношение $e \mathbf{r}_f^V A$ (число e V -реализует формулу A при оценке f):

- 1) неверно $e \mathbf{r}_f^V \perp$;
- 2) верно $e \mathbf{r}_f^V \top$;
- 3) $e \mathbf{r}_f^V P(a_1, \dots, a_n) \iff e \in f(P)(a_1, \dots, a_n)$, если P есть n -местная предикатная переменная;
- 4) $e \mathbf{r}_f^V (\Phi \wedge \Psi) \iff p_1 e \mathbf{r}_f^V \Phi$ и $p_2 e \mathbf{r}_f^V \Psi$;
- 5) $e \mathbf{r}_f^V (\Phi \vee \Psi) \iff (p_1 e = 0$ и $p_2 e \mathbf{r}_f^V \Phi)$ или $(p_1 e = 1$ и $p_2 e \mathbf{r}_f^V \Psi)$;

6) $e \mathbf{r}_f^V (\Phi \rightarrow \Psi) \Leftrightarrow e \in I_1^V$ и для всех натуральных чисел s , если имеет место $s \mathbf{r}_f^V \Phi$, то определено $\varphi_e^V(s)$ и верно $\varphi_e^V(s) \mathbf{r}_f^V \Psi$.

7) $e \mathbf{r}_f^V \exists x \Phi(x) \Leftrightarrow p_1 e \in M$ и $p_2 e \mathbf{r}_f^V \Phi(p_1 e)$;

8) $e \mathbf{r}_f^V \forall x \Phi(x) \Leftrightarrow e \in I_1^V$ и для всех $a \in M$ определено $\varphi_e^V(a)$ и имеет место $\varphi_e^V(a) \mathbf{r}_f^V \Phi(a)$.

Есть несколько способов определить V -реализуемость замкнутых предикатных формул на основании отношения $e \mathbf{r}_f^V A$:

- замкнутую предикатную формулу A назовем *слабо V -реализуемой* (обозначение: $\mathbf{r}^V A$), если для любого непустого множества $M \subseteq \mathbb{N}$ и произвольной M -оценки f найдется такое натуральное число e , что имеет место $e \mathbf{r}_f^V A$;
- замкнутую предикатную формулу A назовем *V -реализуемой равномерно в области M* (обозначение: $\mathbf{ur}_M^V A$), если найдется такое натуральное число e , что для любой M -оценки f имеет место $e \mathbf{r}_f^V A$;
- замкнутую предикатную формулу A назовем *равномерно V -реализуемой* (обозначение: $\mathbf{ur}^V A$), если найдется такое натуральное число e , что для любого непустого множества $M \subseteq \mathbb{N}$ и произвольной M -оценки f имеет место $e \mathbf{r}_f^V A$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Формула (MP) является слабо V -реализуемой.*

Теорема 2. *Формула (MP) не является равномерно V -реализуемой.*

Теорема 3. *Пусть множество M непусто и V -перечислимо. Тогда формула (MP) является V -реализуемой равномерно в области M .*

Список литературы

- [1] Заславский И. Д., Цейтин Г. С. К вопросу об обобщениях принципа конструктивного подбора // Тр. МИАН СССР. 1964. **72**. 344–347.
- [2] Коновалов А. Ю., Плиско В. Е. О гиперарифметической реализуемости // Мат. зам. 2015. **98**, №5. 725–746.
- [3] Коновалов А. Ю. Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. №1. 52–56.
- [4] Плиско В. Е. Абсолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**. №2. стр. 315–334.

Markov's Principle is uniformly V -realizable in any V -enumerable domain.

Konovalov A. Yu.

Various variants of the notion of the V -realizability for predicate formulas are defined, where indexes of functions in the set V are used for interpreting the implication and the universal quantifier. It is proved that Markov's Principle is weakly V -realizable, not uniformly V -realizable, and uniformly V -realizable in any V -enumerable domain $M \subseteq \mathbb{N}$.

Keywords: constructive semantics, realizability, absolute realizability, generalized realizability, Markov's Principle.

