О свойствах языков, устойчивых относительно операций выпадения, вставки

Дергач П.С., Кудрявцев В.Б.

В статье изучаются операции выпадения/вставки, продвижением которых занимался В. И. Левенштейн. Вводятся операторы замыкания относительно этих операций. Для оператора вставки доказывается существование, конечность и единственность базиса в замкнутых классах, а для оператора выпадения — несуществование для бесконечного класса и существование, конечность и единственность — для конечного. Исследуется автоматная сложность замкнутых классов. Решаются проблемы полноты, предполноты и выразимости.

Ключевые слова: операции выпадения и вставки; замкнутый класс; регулярный язык; базис; автоматная сложность; проблемы полноты/предполноты/выразимости.

Введение

Данная статья является продолжением статьи [1] , которая, в свою очередь, основана на статье [2]. В ней изучаются языки, устойчивые относительно операций выпадения, вставки — по отдельности для каждой из операций. В [1] было показано, что такие языки регулярны, был найден их канонический вид. В этой статье изучаются и успешно решаются следующие три проблемы:

- существование, нахождение и количество базисов у возникающих замкнутых классов;
- разбиение замкнутых классов в конечное объединение регулярных множеств, имеющих линейную от длины выражения автоматную сложность;

- полнота, предполнота и выразимость для классов регулярных языков относительно операторов выпадения, вставки.

Основные определения и результаты

Напомним основные определения.

Определение 1. *Множество конечных слов в алфавите* A *обозначаем через* A^*. *Пустое слово* Λ *по умолчанию тоже лежит в* A^*.

Определение 2. *Множество натуральных чисел обозначаем через* $\mathbb{N}$, *а множество целых неотрицательных чисел — через* $\mathbb{N}_0$.

Определение 3. *Множество всех регулярных языков в алфавите* A *обозначаем через* $R(A)$.

Замечание 1. *Понятие регулярного языка подробно изложено в [3].*

Определение 4. *Пусть* $\alpha \in A^*$, $P \subseteq A^*$, $k \in \mathbb{N}$, $* \in \{in, out\}$. *Тогда*

$$[\alpha]_*^0 := \{\alpha\},$$

$$[\alpha]_{in}^k := \{\alpha_1 a \alpha_2 \mid \alpha_1\alpha_2 \in [\alpha]_{in}^{k-1}, a \in A, \alpha_1, \alpha_2 \in A^*\},$$

$$[\alpha]_{out}^k := \{\alpha_1\alpha_2 \mid \alpha_1 a \alpha_2 \in [\alpha]_{out}^{k-1}, a \in A, \alpha_1, \alpha_2 \in A^*\},$$

$$[\alpha]_* := \bigcup_{k=0}^{\infty} [\alpha]_*^k,$$

$$[P]_* := \bigcup_{\alpha \in P} [\alpha]_*.$$

Замечание 2. *Возникающий при этом оператор* in *будем далее называть оператором вставки, а оператор* out *— оператором выпадения.*

Определение 5. *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2 \in A^*$. *Если* $\alpha_2 \in [\alpha_1]_{in}$ *или* $\alpha_1 \in [\alpha_2]_{in}$, *то говорим, что эти слова сравнимы. Если же это не так, то говорим, что эти слова несравнимы.*

Определение 6. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Говорим, что* $L \subseteq P$ *— базис относительно оператора* $* \in \{in, out\}$ *в* P, *если*

- $P = [L]_*$,
- *для любого* $L_1 \subset L$ *верно* $P \neq [L_1]_*$.

Определение 7. *При фиксированном входном алфавите* A *и выходном алфавите* $B = \{0, 1\}$ *обозначаем через* $K(A, B)$ *множество абстрактных конечных инициальных автоматов в этих алфавитах. Для* $n \in \mathbb{N}$ *через* $Avt(A, n)$ *обозначаем множество событий* $P \subseteq A^*$, *представимых автоматами из* $K(A, B)$ *с не более чем* n *состояниями.*

Замечание 3. *Зависимость* $Avt(A, n)$ *от* A *далее, для простоты, будем опускать и писать просто* $Avt(n)$.

Замечание 4. *Понятия автомата и представимости события автоматом подробно изложены в [3].*

Определение 8. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Говорим, что класс* P *— полный относительно оператора* $* \in \{in, out\}$ *в* P, *если*

$$[P]_* = A^*.$$

Проблемой полноты относительно одного из операторов $* \in \{in, out\}$ *называем проблему определения по произвольному* $P \in R(A)$ *полноты (или не полноты) этого класса относительно оператора* $*$.

Определение 9. *Пусть* $P \subset A^*$. *Говорим, что класс* P *— предполный относительно оператора* $* \in \{in, out\}$ *в* P, *если*

- $[P]_* \neq A^*$,
- *для любого* $P \subset P_1 \subseteq A^*$ *верно* $[P_1]_* = A^*$.

Проблемой предполноты относительно одного из операторов $* \in \{in, out\}$ *называем проблему определения по произвольному* $P \in R(A)$ *предполноты (или не предполноты) этого класса относительно оператора* $*$.

Определение 10. *Проблемой выразимости относительного одного из операторов* $* \in \{in, out\}$ *называем проблему определения по произвольным* $P_1, P_2 \in R(A)$ *выполнимости свойства*

$$[P_1]_* \subseteq P_2.$$

Утверждение 1. *Пусть* $P \subseteq A^*$, $P = [P]_{in}$. *Тогда в* P *существует базис относительно оператора вставки, он конечен и единственен.*

Утверждение 2. *Пусть* $P \subseteq A^*$, $P = [P]_{out}$. *Если* P *бесконечно, то в* P *не существует базиса относительно оператора выпадения. Если же* P *конечно, то такой базис существует, конечен и единственен.*

Утверждение 3. *Для любого* $\alpha \in A^*$ *верно*

$$[\alpha]_{in} \in Avt(t+1),$$

где t *— длина слова* α.

Утверждение 4. *Для любых* $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1} \in A^*$ *и непустых* $A_1, \ldots, A_s \subseteq A$ *верно*

$$[\alpha_1]_{out} \cdot (A_1)^* \cdot [\alpha_2]_{out} \ldots (A_s)^* \cdot [\alpha_{s+1}]_{out} \in Avt(t_1 + \ldots + t_{s+1} + 2),$$

где t_i *— длины слов* α_i.

Утверждение 5. *Проблема полноты относительно операторов выпадения, вставки алгоритмически разрешима.*

Утверждение 6. *Проблема предполноты относительно операторов выпадения, вставки алгоритмически разрешима.*

Утверждение 7. *Проблема выразимости относительно операторов выпадения, вставки алгоритмически разрешима.*

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Тогда*

$$P = [P]_{in} \Longleftrightarrow P = \bigcup_{\alpha \in T} [\alpha]_{in},$$

где T *— произвольное конечное множество слов в алфавите* A.

Доказательство.

Доказательство этого утверждения приведено в [1].

Лемма 2. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Тогда*

$$P = [P]_{out} \Longleftrightarrow P = \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \cdot [\alpha_{i,2}]_{out} \ldots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $A_{i,j} \subset A$.

Доказательство.

Доказательство этого утверждения приведено в [1].

Лемма 3. *Для любых* $P_1, P_2 \subseteq A^*$ *и* $* \in \{in, out\}$ *верно, что*

- $[P_1 \cdot P_2]_* = [P_1]_* \cdot [P_2]_*$,
- $[P_1 \cup P_2]_* = [P_1]_* \cup [P_2]_*$.

Доказательство.

Первая часть утверждения доказана в [1]. Докажем вторую часть.

Если $\alpha \in [P_1 \cup P_2]_*$, то $\alpha \in [\beta]_*$ для некоторого $\beta \in P_1 \cup P_2$. Пусть это, без ограничения общности, P_1. Тогда $\alpha \in [P_1]_* \subseteq [P_1]_* \cup [P_2]_*$.

В другую сторону, пусть $\alpha \in [P_1]_* \cup [P_2]_*$. Тогда, без ограничения общности, $\alpha \in [P_1]_*$, то есть $\alpha \in [\beta]_*$ для некоторого $\beta \in P_1 \subseteq P_1 \cup P_2$. Значит $\alpha \in [P_1 \cup P_2]_*$.

■

Лемма 4. *Для любого* $P \subseteq A^*$ *верно, что*

- $[P^*]_{in} = A^*$,
- $[P^*]_{out} = A_1^*$, *для некоторого* $A_1 \subseteq A$.

Доказательство.

Доказательство этого утверждения приведено в [1].

Лемма 5. *Пусть* $P \subseteq A^*$ *предполно относительно какого-то из операторов* $* \in \{in, out\}$. *Тогда оно получается из множества* A^* *удалением одного слова.*

Доказательство.

В самом деле, пусть найдется предполное множество, отличающееся от A^* хотя бы на два слова. Назовем их α_1 и α_2. Из второго свойства определения 9 следует, что тогда $\alpha_1 \in [\alpha_2]_*$ и $\alpha_2 \in [\alpha_1]_*$. Но это означает, что $\alpha_1 = \alpha_2$.

■

Доказательство основных утверждений

Утверждение 1. *Пусть $P \subseteq A^*$, $P = [P]_{in}$. Тогда в P существует базис относительно оператора вставки, он конечен и единственен.*

Доказательство.

Из леммы 1 мы знаем, что

$$P = \bigcup_{\alpha \in T} [\alpha]_{in}, \tag{1}$$

где T — произвольное конечное множество слов в алфавите A. Можно считать, что слова из T попарно несравнимы, так как в противном случае большее по длине сравнимое слово можно было бы просто выкинуть из T, сохранив при этом равенство (1). Это то множество, очевидно, и будет базисом в P относительно оператора вставки. В самом деле, первое свойство из определения 6 выполнено в силу (1), а второе — в силу того, что слова из T попарно не сравнимы и ни одно из них не пораждается замыканием остальных.

Осталось доказать единственность базиса. Но легко заметить, что множество T — это множество минимальных по вложению относительно вставки слов из P. Значит каждое слово из T должно быть в произвольном базисе, так как его нельзя получить замыканием других слов из P. Утверждение доказано.

■

Утверждение 2. *Пусть $P \subseteq A^*$, $P = [P]_{out}$. Если P бесконечно, то в P не существует базиса относительно оператора выпадения. Если же P конечно, то такой базис существует, конечен и единственен.*

Доказательство.

Из леммы 2 мы знаем, что

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \cdot [\alpha_{i,2}]_{out} \dots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out}, \tag{2}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $A_{i,j} \subset A$.

Если P бесконечно, то хотя бы одно из множеств $A_{i,j}$ в (2) непусто. Очевидно, что если бы базис в P существовал (назовем его L), то он был бы бесконечен, так как замыкание относительно выпадения переводит конечные множества в конечные. Поэтому в L обязательно было бы слово α, лежащее в, без ограничения общности, множестве

$$[\alpha_{1,1}]_{out} \cdot (A_{1,1})^* \cdot [\alpha_{1,2}]_{out} \dots (A_{1,s(1)})^* \cdot [\alpha_{i,s(1)+1}]_{out}, \tag{3}$$

где $s(1) > 0$. Но тогда, засчет итерации непустого множества $A_{i,j}$ в (3), получаем, что в P существует слово $\beta \neq \alpha$, для которого выполнено $\alpha \in [\beta]_{out}$. Это означает (в силу базисности L), что существует $\gamma \in L$ такое, что $\beta \in [\gamma]_{out}$. Но тогда $\alpha \in [\gamma]_{out}$, а это противоречит базисности L, так как $\alpha \neq \gamma$ и нарушено второе свойство из определения 6.

Допустим теперь, что P конечно. Тогда его базисом будет множество слов из P, являющихся в нем максимальными по вложению. Очевидно, это множество конечно, так как конечно само P. Кроме того, любой базис в P обязан содержать это множество. Значит такой базис единственен (в силу второго свойства из определения 6). Утверждение доказано.

■

Утверждение 3. *Для любого $\alpha \in A^*$ верно*

$$[\alpha]_{in} \in Avt(t+1),$$

где t — длина слова α.

Доказательство.

Пусть $\alpha = a_{i_1} \dots a_{i_t}$. Очевидно, что

$$[\alpha]_{in} = A^* \cdot a_{i_1} \cdot A^* \cdot a_{i_2} \dots A^* \cdot a_{i_t} \cdot A^*. \tag{4}$$

Опишем автомат, задающий это множество. В первом состоянии он всегда переходит в себя, кроме перехода во второе состояние по букве a_{i_1}. Во втором состоянии автомат переходит в себя, кроме перехода в третье состояние по букве a_{i_2}. И так далее. В предпоследнем состоянии он переходит в себя, кроме перехода в последнее состояние по букве a_{i_t}. Наконец, в последнем состоянии он переходит всегда в себя. Автомат принимает те и только те, слова которые приводят его в последнее состояние. Очевидно, что этот автомат искомый и в нем $t+1$ состояний. Неформально говоря, автомат следит за тем, какой максимальный префикс слова α уже встретился как подслово во входном слове. Если этот префикс — все слово, то автомат его принимает. В противном случае, слово автоматом не принимается. Утверждение доказано.

■

Следствие 1. *Пусть $P \subseteq A^*$, $P = [P]_{in}$. В силу леммы 1 получаем, что P представимо в виде конечного объединения множеств вида (4), каждое из которых имеет автоматную сложность, линейно зависящую от своей длины t.*

Утверждение 4. *Для любых $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1} \in A^*$ и непустых $A_1, \ldots, A_s \subseteq A$ верно*

$$[\alpha_1]_{out} \cdot (A_1)^* \cdot [\alpha_2]_{out} \ldots (A_s)^* \cdot [\alpha_{s+1}]_{out} \in Avt(t_1 + \ldots + t_{s+1} + 2), \quad (5)$$

где t_i — длины слов α_i.

Доказательство.

Ограничимся неформальным описанием функционирования автомата. Составим слово $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{s+1}$. Для каждой из позиций в этом слове у автомата будет свое состояние. Таких позиций ровно $t_1 + \ldots t_{s+1} + 1$. Кроме того, у автомата будет одно дополнительное последнее состояние, играющее роль тупиковой ловушки. Находясь в нетупиковом основном состоянии q и получив на вход букву a автомат определяет, в какой самой левой из позиций выражения (5) он все еще может оказаться, стартуя из соответствующей позиции q (при этом всегда вставая слева от итерации, если находится на границе между словами) и двигаясь слева направо. При движении автомат пропускает все буквы слов α_i, отличные от a и пропускает итерацию A_i, если $a \notin A_i$. Если он встретил букву a в каком-то α_i, то он делает еще один шаг вправо и останавливается за найденной буквой. Если же он встретил a в итерации, то он остается слева от нее. Если автомат прошел целиком все выражение (5) и не встретил букву a, то он переходит в тупиковое состояние. Иначе новое состояние автомата будет соответствовать найденной позиции, в которой он остановился. Из тупикового состояния автомат уже никогда не выходит. Автомат будет принимать те и только те слова, которые еще не загнали его в тупиковое состояние. Очевидно, что этот автомат принимает множество (5) и у него $t_1 + \ldots t_{s+1} + 2$ состояний. Утверждение доказано.

■

Следствие 2. *Пусть $P \subseteq A^*$, $P = [P]_{out}$. В силу леммы 2 получаем, что P представимо в виде конечного объединения множеств вида (5), каждое из которых имеет автоматную сложность, линейно зависящую от своей длины $t = t_1 + \ldots + t_{s+1}$.*

Утверждение 5. *Проблема полноты относительно операторов выпадения, вставки алгоритмически разрешима.*

Доказательство.

Заметим, что множество $P \subseteq A^*$ является полным относительно вставки тогда и только тогда, когда содержит пустое слово. В самом деле, пустое слово из других слов получить вставкой нельзя, а из пустого слова, в свою очередь, можно получить вставкой любое слово. Ясно, что проблема принадлежности пустого слова регулярному языку алгоритмически разрешима.

Для доказательства части утверждения относительно оператора выпадения вспомним, что любое регулярное множество можно эффективно представить в виде

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha_{i,1} \cdot (P_{i,1})^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot (P_{i,2})^* \ldots (P_{i,s(i)})^* \cdot \alpha_{i,s(i)+1}, \tag{6}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $P_{i,j} \in R(A)$. Заметим, что в силу лемм 3 и 4 множество $[P]_{out}$ можно теперь эффективно представить в виде

$$\bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \cdot [\alpha_{i,2}]_{out} \ldots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out}, \tag{7}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $A_{i,j} \subset A$. В самом деле, $A_{i,j}$ здесь — это просто буквы, встречающиеся в записи выражения для $P_{i,j}$. Осталось заметить, что множество (7) равно A^* если и только если хотя бы одно из $A_{i,j}$ в нем равно A. В одну сторону этот факт очевиден, а в другую сторону доказывается построением длинного слова, заведомо не лежащего ни в одном из конечных объединений множеств выражения (5). Попросту говоря, мы идем по выражениям для этих множеств слева направо и подбираем буквы входного слова, чтобы алгоритм движения автомата, описанный в доказательстве предыдущего утверждения, обязательно сошел с каждого из них в тупиковое состояние. Это можно сделать, так как всегда можно правильно выбрать очередную букву, чтобы перешагнуть как через конечные позиции в $\alpha_{i,j}$, так и (в случае необходимости) через итерацию какого-то из $A_{i,j}$, ведь все они не равны A. Закончив с одним выражением из (5) мы переходим к следующему, приписывая новые буквы справа от уже найденных. Таким образом, найден эффективный критерий проверки регулярного множества на полноту относительно операции выпадения. Утверждение доказано.

■

Утверждение 6. *Проблема предполноты относительно операторов выпадения, вставки алгоритмически разрешима.*

Доказательство.

В силу леммы 5 класс может быть предполным относительно вставки или выпадения только если он получен из A^* удалением одного слова. Но из пустого слова вставкой можно получить любое другое. Значит предполным относительно оператора вставки будет единственное множество $A \setminus \{\Lambda\}$. И можно эффективно проверить, равны ли два регулярных множества. Относительно оператора выпадения нужно заметить, что какое бы мы слово не удалили из A^*, оставшееся множество при замыкании относительно оператора выпадения даст все A^*, то есть такие множества будут полными, а не предполными. Значит предполных классов относительно операции выпадения не существует. Утверждение доказано.

■

Утверждение 7. *Проблема выразимости относительно операторов выпадения, вставки алгоритмически разрешима.*

Доказательство.

Мы должны научиться эффективно проверять верность равенства

$$[P_1]_* \subseteq P_2$$

для произвольных $P_1, P_2 \in R(A)$ и $* \in \{in, out\}$. Для этого воспользуемся той же идеей, что и в доказательстве утверждения 5. Получив представление P_1 в виде (6) и используя леммы 3 и 4 можно эффективно получить представление множества $[P_1]_{out}$ в виде (6) и множества $[P_1]_{in}$ в виде (1). Далее остается только прверить на вложение пару регулярных множеств. Утверждение доказано.

■

Список литературы

[1] П. С. Дергач. *О языках, устойчивых относительно операций выпадения, вставки.* Интеллектуальные системы, 2018. Т.22, вып. 2, М., Сс. 39-52.

[2] В. И. Левенштейн. *О Двоичные коды с исправлением выпадений и вставок символа 1.* Пробл. передачи информ., 1965. Т.1, вып. 1, М., Сс. 12-25.

[3] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин. *Введение в теорию автоматов.* Издательство "Наука", М., 1985.

[4] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении S-тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.

[5] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.

[6] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

[7] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.

[8] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 67-86.

[9] П. С. Дергач. *О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 147-202.

[10] П. С. Дергач, Е. Д. Данилевская. *О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 1, М., Сс.192-237.

[11] П. С. Дергач. *О структуре вложения прогрессивных множеств сложности два.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 2, М., Сс.117-162.

[12] П. С. Дергач, Ж. И. Раджабов. *О длине минимальной алфавитной склейки для класса линейных регулярных языков.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 3, М., Сс.120-130.

[13] Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.

[14] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.

[15] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.

[16] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.

[17] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.

[18] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграмных языках*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

[19] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.

[20] В. А. Орлов. *О конечных автоматах с максимальной степенью различимости состояний*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 1, М., Сс. 213-222.

[21] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 283-330.

[22] А. А. Петюшко, Д. Н. Бабин. *Классификация Хомского для матриц биграммных языков*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 331-336.

[23] С. Б. Родин. *О связи линейно реализуемых автоматов и автоматов с максимальной вариативностью относительно кодирования состояний*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 337-348.

[24] С. Б. Родин. *О свойствах кодирования состояний автомата*. Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 1, М., Сс. 97-111.

[25] Р. А. Ищенко. *Графы групповых автоматов.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 2, М., Сс. 111-116.

[26] И. Е. Иванов. *Об автоматных функциях с магазинной памятью.* Интеллектуальные системы, 2018. Т.22, вып. 1, М., Сс. 39-110.

[27] П. А. Пантелеев. *Об обощении теоремы Мура.* Интеллектуальные системы, 2018. Т.22, вып. 1, М., Сс. 151-154.

[28] И. Ю. Самоненко. *О количестве регулярных языков, представимых в групповых гиперавтоматах.* Интеллектуальные системы, 2018. Т.22, вып. 2, М., Сс. 113-121.

[29] А. А. Часовских. *Проблема полноты в классах линейных автоматов.* Интеллектуальные системы, 2018. Т.22, вып. 2, М., Сс. 151-154.

Сведения об авторах

Дергач Петр Сергеевич
Младший научный сотрудник МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: dergachpes@mail.ru.
Кудрявцев Валерий Борисович
Заведующий кафедрой МаТИС МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: ilaky@bk.ru.

On the properties of languages that are stable to the drop/paste operations

Dergach P.S., Kudryavtsev V.B.

The article is devoted to the drop and paste operations, which have been promoted by V.I. Levenshtein. Closure operators are introduced for these operations. For the paste operator the existence, finiteness and uniqueness of the basis in closed classes are proved, and for the drop operator, non-existence for the infinite class and existence, finiteness and uniqueness for the finite are proved. The automata complexity of closed classes is investigated. The problems of completeness,precompleteness,expressibility are solved.

Keywords: drop and paste operations; closed class; regular language; basis; automata complexity; problems of completeness,precompleteness,expressibility.