Об аналитическом представлении функции сложности минимальной схемы в базисе из штриха Шеффера.

Носов М.В.

В работе представлены формулы промежуточного типа, задающие сложность минимальной схемы, в базисе из штриха Шеффера.
Ключевые слова: сложность минимальной схемы, штрих Шеффера.

Пусть m такое натуральное число, что для любая булевская функция от n переменных реализуется схемой в базисе из штриха Шеффера, сложности не более $m-n$. Элементы схемы перенумеруем числами $n+1,\ldots,m$, входы системы имеют номера $1,\ldots,n$. Тройка $\{i_l,j_l,l\}$ определяет соединение l-ого элемента с выходами предыдущих элементов или входов системы с номерами i_l и j_l. Роль выходов системы будут последовательно выполнять выходы элементов $n+1,\ldots,m$. Если элемент с номером p является выходом системы, то может случиться так, что некоторые элементы с меньшими номерами фактически не используются, так как их выходы соединёны со входами элементов, номер которых превышает p. Для булевской функции f, отличной от селектора, первая схема появится, т.е. существует набор троек(соединений), при $p=L_{\{|\}}(f)$ и, очевидено, что для любого большего номера всегда можно построить схему, реализующую f. Пусть Y_m- матрица размером $2^n\times m$, у которой первые n столбцов есть вектора E_2^n, а остальные элементы - свободные переменные, принимающие значения 0 или 1. Имеет место следующая формула

$$L_{\{|\}}(f)=\sum_{p=n+1}^{m}\prod_{\left(\substack{\{(i_l,j_l,l)\}\\ l=n+1,\ldots,m}\right)}\prod_{Y_m}\Big(1-\prod_{k=1}^{2^n}\prod_{l=n+1}^{m}((1-(y_{kp}- \tag{0.1}$$

$$-f\left(y_{k1},\ldots,y_{kn}\right)^2\times\times\left(1-(y_{kl}-1+y_{ki_l}y_{kj_l})^2\right)\Big).$$

Количество различных способов соединений A_m, т.е. количество троек с учётом порядка входов, задается равенством

$$A_m = |\{(i_l, j_l, l), l = n+1, \ldots, m\}| = \prod_{l=n+1}^{m} (l-1)^2 = \left(\frac{(m-1)!}{(n-1)!}\right)^2,$$

количество различных матриц $|Y_m|$ задается равенством

$$|Y_m| = 2^{(m-n)2^n}.$$

Переводя произведения в суммы, с учетом значений скобок 0 или 1, получается следующее представление

$$L_{\{|\}}(f) = \sum_{p=n+1}^{m} \frac{1}{(A_m|Y_m|)!} \sum_{q=0}^{A_m|Y_m|} s\left(A_m|Y_m|+1, q+1\right) \times$$
$$\times \Big(A_m|Y_m| - \sum_{\binom{\{(i_l,j_l,l)\}}{l=n+1,\ldots,m}} \sum_{Y_m} \prod_{k=1}^{2^n} \prod_{l=n+1}^{m} \left(\Big(1 - (y_{kp} - f\left(y_{k1}, \ldots, y_{kn}\right))^2\Big) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 - (y_{kl} - 1 + y_{ki_l} y_{kj_l})^2\right)\right)\Big)^q,$$

где $s\left(A_m|Y_m|+1, q+1\right)$ - числа Стирлинга первого рода. С учетом того, что выход системы берется с выхода p - ого элемента, а при фиксированном наборе соединений выходы определяются однозначно по входам получается сокращение суммирования

$$\begin{gathered} L_{\{|\}}(f) = \sum_{p=n+1}^{m} \frac{1}{(A_m|Y_m|)!} \sum_{q=0}^{A_m|Y_m|} s\left(A_m|Y_m|+1, q+1\right) \times \\ \times \Big(A_m|Y_m| - \left(\tfrac{(m-1)!}{(p-1)!}\right)^2 \sum_{\binom{\{(i_l,j_l,l)\}}{l=n+1,\ldots,p}} \sum_{Y_p} \prod_{k=1}^{2^n} \prod_{l=n+1}^{p} \\ \left(\Big(1 - (y_{kp} - f\left(y_{k1}, \ldots, y_{kn}\right))^2\Big) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - (y_{kl} - 1 + y_{ki_l} y_{kj_l})^2\right)\right)\Big)^q, \end{gathered} \tag{0.2}$$

Нетрудно заметить, что величина

$$K_{\{|\}}(f,p)=\sum_{\substack{\left(\{(i_l,j_l,l)\}\right)\\ l=n+1,\dots,p}}\sum_{Y_p}\prod_{k=1}^{2^n}\prod_{l=n+1}^{p}\left(\left(1-(y_{kp}-f\left(y_{k1},\dots,y_{kn}\right))^2\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-(y_{kl}-1+y_{ki_l}y_{kj_l})^2\right)\right)$$

задает количество схем, реализующих функцию f глубины не более p. Обозначения

$$N=\{1,\dots,2^n\},$$

$$\prod_{\binom{k\in\gamma}{\gamma\subseteq N}}y_{kj}=y_{\gamma j},$$

$$||Y_p||=\sum_{l=n+1}^{p}\sum_{k=1}^{2^n}y_{kl}.$$

Ниже следуют два представления функции $K_{\{|\}}(f,p)$

$$\begin{gathered}K_{\{|\}}(f,p)=\sum_{\gamma,\gamma\subseteq N}(-1)^{|\gamma|}\Bigg(\sum_{\binom{\beta_{n+1},\dots,\beta_{p-1},}{\beta_i\subseteq N,i=1,\dots,p-1}}\sum_{\binom{\beta_p,\beta_p\subseteq N,}{C\beta_p\subseteq\gamma}}\\ (-1)^{|\beta_{n+1}|+\dots+|\beta_p|}\sum_{Y_p}\Bigg((-1)^{||Y_{p-1}||}\times\prod_{k\in C\gamma}(1-y_{kp})\prod_{l=n+1}^{p}\\ \left(\text{y}_{C\beta_l l}\Big(\sum_{r=1}^{l-1}y_{\beta_l r}\Big)^2\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\prod_{k\in\gamma}f\left(y_{k1},\dots,y_{kn}\right),\end{gathered}\tag{0.3}$$

$$K_{\{|\}}(f,p) = 2^{2^n}(-1)^{|N_f|}\sum_{Y_{p-1}}\Big((-1)^{||Y_{p-1}||}\Big(\tag{0.4}$$

$$\sum_{\beta_p,\beta_p\subseteq N}\frac{(-1)^{|\beta_p|}}{2^{|N_f\cup C\beta_p|}}\Big(\sum_{r=1}^{p-1} y_{\beta_p r}\Big)^2\Big)\times$$

$$\times\prod_{l=n+1}^{p-1}\Big(\sum_{\beta_l,\beta_l\subseteq N}(-1)^{|\beta_l|}\, y_{C\beta_l l}\Big(\sum_{r=1}^{l-1} y_{\beta_l r}\Big)^2\Big)\Big)$$

где N_f - множество единиц функции f.