

Оценка длины периода выходной последовательности для автономного автомата с магазинной памятью с однобуквенным магазином

Иванов Илья Евгеньевич, МГУ им. М.В.Ломоносова

ivanov.ilya.rus@gmail.com

Аннотация

Ранее автор доказал, что автоматные функции с магазинной памятью сохраняют множество периодических последовательностей, и привел экспоненциальную от характеристик автомата оценку удлинения периода. В данной работе для автоматов с однобуквенным магазином эту оценку удалось понизить до квадратичной.

1. Введение

Первые упоминания автоматов с дополнительной памятью в виде стека начали появляться в 50-х годах прошлого века. Они возникали преимущественно в контексте задач обработки естественного языка. Формализовали определение автомата с магазинной памятью Эттингер[1] и Шютценберже [2] уже в 60-х годах. Эквивалентность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик была показана Хомским[3] и Эви[4].

Очень скоро стало понятно, что класс контекстно-свободных языков устроен сложнее класса регулярных. В работах [5, 6] появились примеры алгоритмически неразрешаемых проблем, которые были успешно разрешены для регулярных языков. Оказалось, что многие техники работы с конечными автоматами и регулярными языками для автоматов с магазинной памятью не работают. В частности, было показано, что классы языков, распознаваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью, не равен классу всех контекстно-свободных языков, а является его собственным подмножеством [7, 2].

Полученные отрицательные результаты мотивировали математиков рассматривать более простые подклассы автоматов с магазинной памятью. Хорошим примером такого класса является класс детерминированных автоматов с магазинной памятью с однобуквенным магазином. С одной стороны, этот класс автоматов является естественным расширением класса конечных автоматов, с другой стороны, он является довольно содержательным, так как, например, содержит язык правильных скобочных записей. Лишь в 70-80-х годах для этого класса автоматов была успешно решена проблема эквивалентности, а также проверка языка на регулярность [8, 9]. Исследование этого класса автоматов продолжается до сих пор. Нельзя не отметить работу [10], в которой была получена сложность проверки двух автоматов с однобуквенным магазином на эквивалентность.

Несмотря на довольно большие успехи в изучении автоматов с магазинной памятью в большинстве работ никак не изучаются функциональные свойства этих автоматов, как, например, это было сделано для конечных автоматов. Основные результаты можно найти в [11]. Отдельно хотелось бы отметить результат Д.Н. Бабина — решение им аналога 13-ой проблемы Гильберта для автоматных функций [12]. Аналогичных работ,

изучающих свойства автоматов с магазинной памятью как преобразователей последовательностей, почти не встречается в литературе. Поэтому автором была предпринята попытка разобраться в данной области.

В работе [13] было доказано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности. Автором приводится экспоненциальная верхняя оценка на максимальную длину периода в зависимости от периода входной последовательности и характеристик автомата и доказывается, что если в алфавите магазина разрешается использовать хотя бы два символа, то существенно понизить экспоненциальную оценку нельзя [14].

В данной работе удалось понизить верхнюю оценку до квадратичной от количества состояний в случае автономного автомата с однобуквенным магазином.

Работа состоит из 7 разделов, включая введение, заключение и список литературы. Во втором разделе даются основные определения и постановка задачи. В третьем — приводятся основные результаты. В четвертом разделе доказывается нижняя оценка путем построения примера. В пятом — доказывается асимптотическая верхняя оценка. Далее следует заключение и библиография. В последний раздел (дополнений) вынесены простые, но технически громоздкие утверждения.

2. Определения

Будем говорить, что $P_0 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — инициальный автомат с магазинной памятью без входа (автономный), где Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow B$ — функция выхода, $\eta : Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине. Функционирование автомата P_0 удовлетворяет системе канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), z(t)) \end{cases} \quad (1)$$

где $LS : \Gamma^* \rightarrow \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Пусть $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$. Обозначим множество автоматов с магазинной памятью без входа с заданными n , m , k через $\mathcal{M}_0(n, m, k)$.

В работе [13] было показано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности. Откуда следует, что выходом автономного автомата будет периодическая последовательность. Для автомата с магазинной памятью без входа обозначим $L(P)$ минимальную длину периода периодической последовательности, которую он генерирует. Далее под длиной периода будем понимать именно минимальную, то есть $L(P)$. Нас будет интересовать максимальная длина периода в классе автоматов $\mathcal{M}_0(n, m, k)$, а

именно:

$$L(n, m, k) = \max_{P \in \mathcal{M}_0(n, m, k)} L(P).$$

Для получения оценок на $L(n, 1, k)$ введем дополнительные ограничения на рассматриваемые автоматы. Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Будем считать, что P генерирует периодическую последовательность без предпериода и все состояния достижимы и встречаются бесконечное число раз в последовательности $q(t)$, заданной каноническими уравнениями. Заметим, что если в последовательности $\gamma(t)$ пустое слово встречается лишь конечное число раз, то из-за отсутствия предпериода магазин не бывает пустым. Поэтому в этом случае P функционируют в точности как автомат без магазина, то есть конечный автомат. Разумеется, этот случай нас не интересует. Поэтому будем считать, что пустое слово в последовательности $\gamma(t)$ будет встречаться бесконечное число раз. Для удобства будем считать, что начальная запись в магазине пустая, то есть $\gamma_0 = \lambda$. Будем рассматривать наиболее общую функцию выхода $\psi(q, z) = (q, z)$, то есть $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$. Очевидно, что наложение описанных ограничений на класс автоматов не меняют максимальную длину периода внутри класса автоматов.

Обозначим через $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ множество автоматов P из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$, для которых выполнены описанные выше ограничения, а именно:

- периодическая последовательность, сгенерированная P , не имеет предпериода;
- все состояния достижимы бесконечное число раз;
- $\gamma_0 = \lambda$;
- $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q, z) = (q, z)$.

Очевидно, что выполнено

$$L(n, 1, k) = \max_{P \in \mathcal{M}'_0(n, 1, k)} L(P),$$

поэтому далее будем рассматривать автоматы только из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$.

Введем еще несколько определений, необходимых для дальнейших рассуждений. Для автомата P выделим множество стирающих состояний

$$S = \{q \in Q \mid \eta(q, 1) = \lambda\}.$$

Если $q \in W = Q \setminus S$, то будем говорить, что состояние пишущее. В множестве пишущих состояний выделим подмножество нейтральных состояний

$$N = \{q \in Q \mid \eta(q, 1) = 1\},$$

то есть таких, при прохождении через которые непустое слово, записанное в магазине, не изменяет свою длину.

Если в автомате P найдётся множество состояний $C = \{c_1, \dots, c_\ell\} \subseteq Q$ такое, что выполнено $\varphi(c_i, 1) = c_{i+1}$ для $i = 1, \dots, \ell - 1$ и $\varphi(c_\ell, 1) = c_1$, то будем говорить, что C является автоматным циклом. Длиной автоматного цикла C будем называть число состояний в этом цикле.

Для автомата P однозначно определены последовательности состояний и состояний магазина согласно (1). Будем говорить, что автоматный цикл C достижим, если найдется такой номер t_1 , что выполнены следующие условия:

1. $\{q(t_1), q(t_1 + 1), \dots, q(t_1 + |C| - 1)\} = C$;
2. $z(t_1) = z(t_1 + 1) = \dots = z(t_1 + |C| - 1) = 1$.

Каждому автоматному циклу сопоставим индекс — число, на которое изменится длина памяти магазина при одном проходе по нему. Будем называть автоматный цикл стирающим, если индекс отрицательный, то есть количество символов в магазине при одном проходе по циклу уменьшается. Если индекс автоматного цикла неотрицательный, то будем говорить, что автоматный цикл пишущий.

Будем называть конфигурацией автомата пару его состояние и состояние магазина $c(t) = (q(t), \gamma(t))$. Будем говорить, что конфигурация c_2 достижима из конфигурации c_1 , и писать $c_1 \Rightarrow c_2$, если автомат с магазинной памятью из конфигурации c_1 перейдет в конфигурацию c_2 через конечное число тактов.

В некоторых случаях нас будет интересовать поведение автомата при непустом магазине. В таких случаях будем говорить, что конфигурация c_2 достижима без опустошения магазина из конфигурации с непустым магазином c_1 , и писать $c_1 \Rightarrow c_2$. Заметим, что и c_1 , и c_2 могут иметь пустой магазин.

3. Основные результаты

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. При $k > 1$ и $n \rightarrow \infty$

$$L(n, 1, k) = \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 (1 + o(1)).$$

4. Доказательство нижней оценки $L(n, 1, k)$

Пример 1.

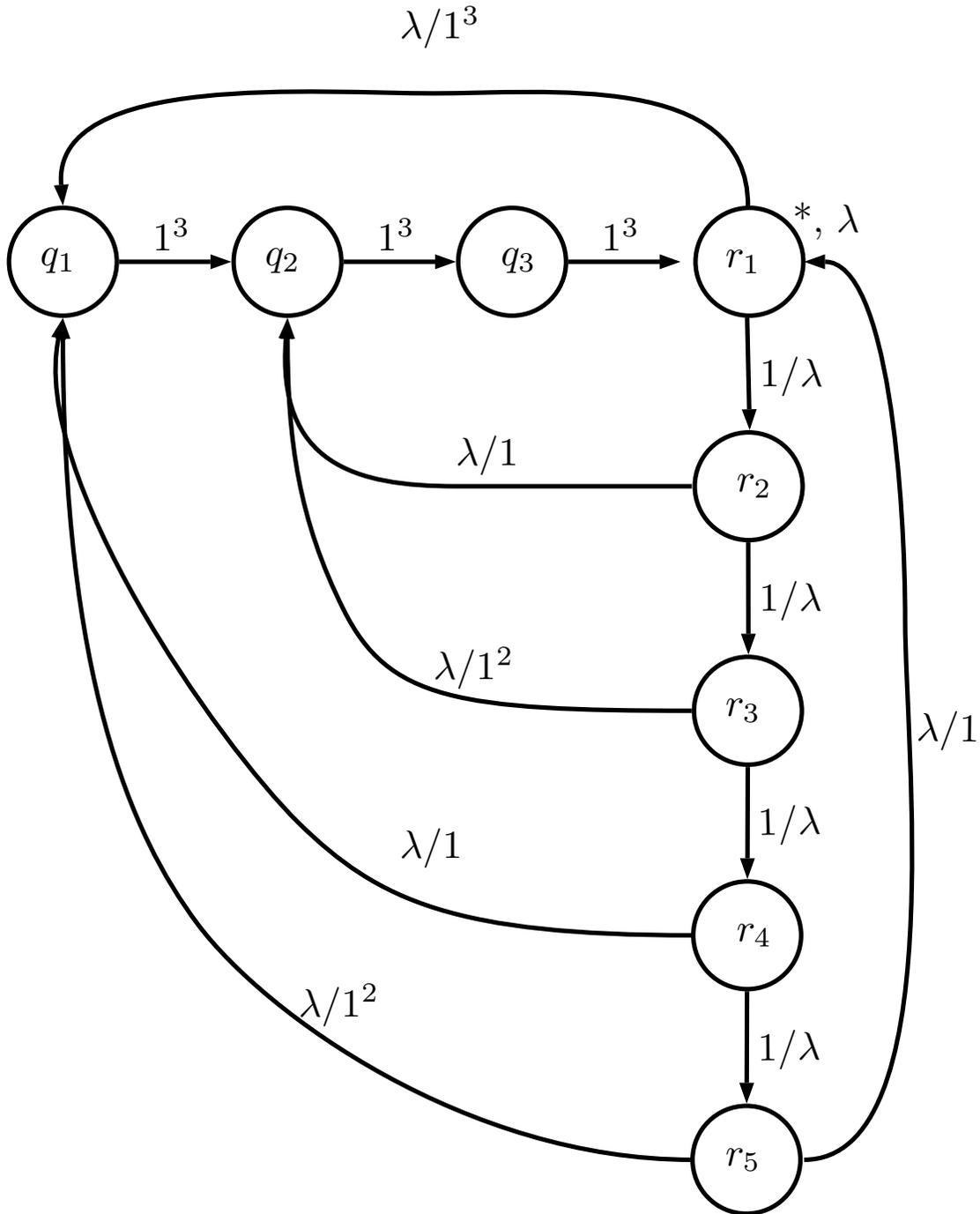
Пусть автономный автомат с магазинной памятью $P(s) = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_h, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, 1, k)$, где $0 < s < n$, $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_{n-s}, r_1, \dots, r_s\}$, $\Gamma = \{1\}$, $h = (((k-1)(n-s+1) + 2) \bmod s) + 1$

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = q_h, z = \lambda, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, & \text{если } q = q_i, i \neq n-s, \\ r_1, & \text{если } q = q_{n-s}, \\ r_{i+1}, & \text{если } q = r_i, z = 1, \\ q_1, & \text{если } q = r_h, z = \lambda, \\ q_{1 + \lceil \frac{(h-1-i) \bmod s}{k-1} \rceil}, & \text{если } q = r_i, i \neq h, z = \lambda, \\ q, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\eta(q, z) = \begin{cases} 1^k, & \text{если } q = q_i, \\ 1^k, & \text{если } q = r_h, z = \lambda, \\ 1^{k-1 - ((h-1-i) \bmod s) \bmod (k-1)}, & \text{если } q = r_i, i \neq h, z = \lambda, \\ \lambda, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата для $n = 8$, $k = 3$ и $s = 5$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η , то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z , автомат записывает на выходную ленту пару (q, z) , а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η . Следующее состояние указывает стрелка.



Опишем функционирование описанного выше автомата $P(s)$ и поясним его канонические уравнения. Автомат начинает работу из состояния r_h и с пустым магазином. Далее автомат максимально заполняет магазин, проходя по состояниям q_1, \dots, q_{n-s} до тех пор, пока не попадает в стирающий цикл r_1, \dots, r_s . В состоянии r_1 в магазине записано $(k-1)(n-s+1) + 1$ символов. Так как дальше при каждом заполнении магазина мы будем уменьшать на единицу количество записываемых символов, то состояния, в которых, магазин становится пустым, будут меняться последовательно. То есть если мы стартовали из состояния r_{i+1} при пустом магазине, то, заполнив и опустошив магазин, автомат окажется в состоянии r_i . Исходя из этого, мы и получаем формулу для номера начального состояния. Мы подберем r_h таким, чтобы, заполняя магазин максимально возможным количеством символов, после стирания их попасть в состояние r_{h-1} . Отсюда получаем, что

$$h = (((k-1)(n-s+1) + 2) \bmod s) + 1.$$

Следующим требующем объяснения моментом в описании уравнений автомата является его поведение при опустошении магазина, то есть в состоянии r_i и $z = \lambda$. По сказанному выше в состоянии r_h автомат пишет максимально возможное количество символов в магазин. Значит, из этого состояния при пустом магазине автомат должен перейти в состояние q_1 и записать при этом слово длины k в магазин. При следующем опустошении магазина мы окажемся в состоянии r_{h-1} . Из этого состояния начинается заполнение магазина. Причем автомат должен записать на единицу меньше символов в магазин. Следовательно, из состояния r_{h-1} автомат перейдет в состояние q_1 , и в магазин будет записано слово длины $k-1$. Продолжая опустошать магазин, автомат будет писать на 1 символ меньше и переходить в состояние q_1 до тех пор, пока не придётся записать один символ. После этого мы уже не сможем перейти в состояние q_1 , так как заиклимся. Следовательно, мы должны будем перейти в состояние q_2 и записать в магазин $k-1$ символ по той же причине. И далее при переходе из стирающего цикла мы будем писать от $k-1$ до 1 символа в магазин, после чего будем менять состояние перехода.

Подсчитаем длину периода $L(P(s))$. Удобно считать стирающие такты и записывающие по отдельности:

$$L(P(s)) = \tau_{\text{записи}} + \tau_{\text{стирания}},$$

где

$$\tau_{\text{стирания}} = \sum_{i=0}^{s-1} ((n-s)(k-1) + 1 - i) = s(k-1)(n-s+1) + s - \frac{s(s-1)}{2},$$

$$\tau_{\text{записи}} = s(n-s+1) - \sum_{i=0}^{s-2} \left[\frac{i}{k-1} \right].$$

Таким образом, длина периода сгенерированной им последовательности равна

$$L(P(s)) = sk(n-s+1) + s - \frac{s(s-1)}{2} - \sum_{i=0}^{s-2} \left[\frac{i}{k-1} \right]$$

Лемма 1. Для натуральных $s, k > 1$ выполнено

$$\frac{s^2}{2(k-1)} - s \leq \sum_{i=0}^{s-2} \left[\frac{i}{k-1} \right] \leq \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2}$$

Доказательство. Пусть $f(s) = \sum_{i=0}^{s-2} [\frac{i}{k-1}]$. Тогда

$$f(s) = (k-1) \sum_{i=0}^{[\frac{s}{k-1}] - 1} i + [\frac{s}{k-1}](s \bmod (k-1)) = (k-1) \frac{[\frac{s}{k-1}]([\frac{s}{k-1}] - 1)}{2} + [\frac{s}{k-1}](s \bmod (k-1))$$

Отсюда получаем, что

$$f(s) \leq (k-1) \frac{\frac{s}{k-1} (\frac{s}{k-1} - 1)}{2} = \frac{s^2}{2(k-1)} - \frac{s}{2}$$

и

$$f(s) \geq (k-1) \frac{(\frac{s}{k-1} + 1) \frac{s}{k-1}}{2} + s = \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2}.$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{s-2} [\frac{i}{k-1}] = f(s) - [\frac{s-1}{k-1}],$$

то

$$\frac{s^2}{2(k-1)} - s \leq \sum_{i=0}^{s-2} [\frac{i}{k-1}] \leq \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2},$$

что и требовалось доказать. □

Применяя лемму, получаем, что

$$L(P(s)) \geq sk(n-s+1) + s - \frac{s(s-1)}{2} - \frac{s^2}{2(k-1)} - \frac{3s}{2} = sk(n-s+1) - \frac{ks^2}{2(k-1)}$$

Полагая $P = P(s)$ при $s = [\frac{k-1}{2k-1}n]$, получаем, что

$$\begin{aligned} L(P) &\geq [\frac{k-1}{2k-1}n]k(n - [\frac{k-1}{2k-1}n] + 1) - \frac{k([\frac{k-1}{2k-1}n])^2}{2(k-1)} \geq (\frac{k-1}{2k-1}n - 1)k(n - \frac{k-1}{2k-1}n + 1) - \frac{k(\frac{k-1}{2k-1}n)^2}{2(k-1)} = \\ &= \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 - \frac{1}{2k-1}n - 1. \end{aligned}$$

Данный пример доказывает нижний оценки на $L(n, 1, k)$.

Теорема 2. При $k > 1$ и $n \rightarrow \infty$

$$L(n, 1, k) \geq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2(1 + o(1)).$$

Теорема 3. При $n > 1$ и $k \rightarrow \infty$

$$L(n, 1, k) \geq \frac{n^2}{4}k(1 + o(1)).$$

5. Доказательство верхней оценки $L(n, 1, k)$

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. Пусть P — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$. Тогда существует автомат с магазинной памятью P' из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$, который в процессе функционирования не бывает с пустым магазином два такта подряд, и периоды выходных последовательностей автоматов P и P' отличаются не более чем на n .

Доказательство. Пусть автомат P при очередном такте стирает последний символ из магазина, оказываясь в некотором состоянии q , и далее проходит еще несколько состояний, не делая записей в магазин. После чего попадает в состояние q_1 , в котором пишет непустое слово 1^ℓ и переходит в состояние q_2 . Тогда можно трансформировать автомат P так, чтобы из состояния q автомат сразу переходил в q_2 и писал при этом в магазин 1^ℓ . Делая такую трансформацию для всех аналогичных состояний, получаем автомат P' , который удовлетворяет условию леммы, так как внутри одного периода автомат может быть с пустым магазином не более n раз. \square

5.1. Простая верхняя оценка

Теперь непосредственно приступим к доказательству верхней оценки на $L(n, 1, k)$.

Лемма 3. Пусть P — автомат с магазинной памятью из класса $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$. Тогда

$$L(P) \leq n(h_{max} + 1),$$

где $h_{max} = \max_t |\gamma(t)|$ — максимальное количество символов, которое может быть записано в магазине.

Доказательство. Заметим, что из определения класса автоматов $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ следует, что h_{max} всегда существует, то есть $h_{max} < \infty$. Внутри одного периода автомат может находиться в состоянии q только с разными состояниями магазина от пустого до содержащего h_{max} символов. Суммируя по всем состояниям, получаем требуемую оценку. \square

Утверждение 1. При $k > 1$

$$L(n, 1, k) \leq (k - 1)n^2 + 2n.$$

Доказательство. Так как среди n состояний должно быть хотя бы одно стирающее, то $n - 1$ пишущее состояние не может записать больше $n(k - 1) + 1$, то есть $h_{max} \leq n(k - 1) + 1$. Подставляя эту оценку в предыдущую лемму, получаем требуемое. \square

5.2. Случай пишущего автоматного цикла

Лемма 4. Пусть P — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$. Если в P есть достижимый пишущий автоматный цикл, то период сгенерированной P последовательности равен длине этого цикла.

Доказательство. Если в P есть достижимый пишущий цикл, то автомат не может его покинуть, так как магазин уже никогда не будет пустым в силу неотрицательности индекса. Значит, период будет равен длине цикла. \square

Замечание. В силу доказанной леммы далее не имеет смысла рассматривать автоматы с достижимыми пишущими циклами. Будем считать, что если в автомате есть достижимый цикл, то он стирающий.

5.3. Случай без автоматных циклов

В этом разделе будет дана оценка на максимальную длину периода выходной последовательности для автомата без стирающих циклов.

Лемма 5. Пусть P — автомат с магазинной памятью из класса $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$. Если P не имеет автоматных циклов, то период сгенерированной P последовательности не превосходит $\frac{k-1}{k}n^2 + 2n$.

Доказательство. Оценим h_{max} . Так как в P нет автоматных циклов, то h_{max} не может быть большим. Максимально возможное значение h_{max} можно получить следующим образом. Необходимо в автомате иметь максимально возможное число w пишущих по k символов состояний, так чтобы оставшихся $s = n - w$ состояний хватило, чтобы стереть то, что было записано. Все стирания должны быть сделаны в разных состояниях, так как стирающих циклов нет. Отсюда получаем следующее условие:

$$h_{max} \leq (w + 1)(k - 1) + 1 = s.$$

Решая, получаем, что

$$h_{max} \leq s = \frac{k-1}{k}n + 1.$$

Подставляя h_{max} в полученную выше оценку, получаем требуемое. □

Обозначим $L_0(n, k) = \frac{k-1}{2k}n^2 + 5n$

Утверждение 2. Пусть P — автомат с магазинной памятью из класса $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$. Если P не имеет автоматных циклов или имеет только недостижимые пишущие автоматные циклы, то период сгенерированной P последовательности не превосходит $L_0(n, k)$.

Доказательство. При функционировании автомата P найдется последовательность тактов от t_1 до t_2 , когда из пустого магазина автомат заполняет магазин до уровня в h_{max} символов, то есть $\gamma(t_1) = \lambda$, $\gamma(t_2) = 1^{h_{max}}$ и $\gamma(t) \neq \lambda$ при $t_1 < t \leq t_2$. Очевидно, что каждое состояние $q(t)$ при $t_1 < t \leq t_2$ не может встречаться в одном периоде больше, чем $|\gamma(t)| + 1$ раз в силу определения h_{max} . Пусть $h_{max} = 1 + h_0 + h_1(k - 1)$, где $0 \leq h_0 < k - 1$. Нетрудно видеть, что в отрезке от $t_1 + 1$ до t_2 найдутся такие t_i , что будет выполнено $|\gamma(t_i)| \leq (k - 1)i + 1$ при $i = 1, \dots, h_1$ и $q(t_i) \in W$. Учитывая это, получаем, что

$$\begin{aligned} L(P) &\leq (h_{max} + 1)(n - h_1) + \sum_{i=1}^{h_1} (2 + i(k - 1)) = (h_{max} + 1)n - \sum_{i=1}^{h_1} (h_{max} - 2 - i(k - 1)) = \\ &= (h_{max} + 1)n - \sum_{i=1}^{h_1} (h_0 + (h_1 - i)(k - 1) - 1) = (h_{max} + 1)n + h_1 - h_0 h_1 - \frac{(k - 1)h_1(h_1 - 1)}{2} = \\ &= (h_{max} + 1)n + \frac{h_1(k + 2 - h_0 - h_{max})}{2} \leq (h_{max} + 1)n + \frac{h_{max}(k + 2 - h_{max})}{2(k - 1)}. \end{aligned}$$

Каждому состоянию q сопоставим число $h(q)$, равное максимальному числу символов в магазине, которое может быть при достижении этого состояния. Заметим, что оценку удалось улучшить за счет уточнения

функции $h(q)$ для некоторых пишущих состояний q пользуясь тем, что автомат за один такт может писать ограниченное количество символов. Теперь сделаем аналогичное уточнение при стирании магазина, то есть для стирающих состояний.

Покажем, что в P для любого натурального d такого, что $1 \leq d < h_{max}$, найдется такое стирающее q , что $h(q) = d$. Рассмотрим последовательность тактов от t_2 до t_3 , когда автомат стирает магазин от h_{max} до пустого, то есть $\gamma(t_2) = 1^{h_{max}}$, $\gamma(t_3) = \lambda$ и $\gamma(t) \neq \lambda$ при $t_2 < t < t_3$. В этом отрезке найдется такой номер t' , что $q(t') = q_0 \in S$ и $|\gamma(t')| = d$. Если $h(q_0) = d$, то заканчиваем процедуру поиска. Если $h(q_0) > d$, то это означает, что найдется момент времени t_4 такой, что $q(t_4) = q_0$ и $|\gamma(t_4)| > d$. Тогда пусть t_5 таково, что $\gamma(t_5) = \lambda$ и при $t_4 < t < t_5$ $\gamma(t_5) \neq \lambda$. На этом новом отрезке выберем аналогичным образом t'' такое, что $q(t'') = q_1 \in S$ и $|\gamma(t'')| = d$ и так далее. Возможны два результата работы этой процедуры: мы найдем такое q_i , что $h(q_i) = d$ или последовательность q_0, q_1, \dots, q_ℓ заиклится. Если последовательность заиклилась, то это означает, что в автомате есть стирающий автоматный цикл, что противоречит условию. Значит, данная процедура всегда приводит к нахождению требуемого состояния.

Таким образом, мы можем понизить верхнюю оценку еще на $\frac{h_{max}(h_{max}-1)}{2}$, то есть получаем, что выполнено:

$$L(P) \leq (h_{max} + 1)n + \frac{h_{max}(k + 2 - h_{max})}{2(k - 1)} - \frac{h_{max}(h_{max} - 1)}{2}.$$

Максимизируя выражение по h_{max} при условии, что $0 \leq h_{max} \leq \frac{(k-1)n}{k} + 1$, получаем, что $L(P) \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 5n$, что и требовалось доказать.

□

Пример 2.

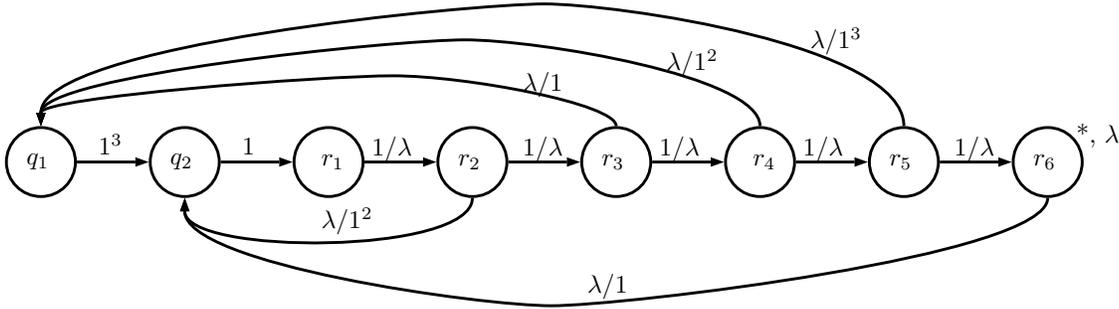
Для $n \geq 3$ и $k \geq 2$ рассмотрим автономный автомат с магазинной памятью $P_0 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_s, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, 1, k)$, где $s = n - 1 - \lfloor \frac{n-3}{k} \rfloor$, $x = s - 1 - (k-1)(n-s-1)$, $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_{n-s}, r_1, r_2, \dots, r_s\}$, $\Gamma = \{1\}$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = r_2, z = \lambda, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, & \text{если } q = q_i, i \neq n-s, \\ r_1, & \text{если } q = q_{n-s}, \\ r_{i+1}, & \text{если } q = r_i, i \neq s, z = 1, \\ q_{n-s}, & \text{если } q = r_s, z = \lambda, \\ q_1, & \text{если } q = r_{s-1}, z = \lambda, \\ q_{n-s-\lfloor \frac{i-1}{k-1} \rfloor}, & \text{если } q = r_i, 1 < i < s-1, z = \lambda, \\ q, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\eta(q, z) = \begin{cases} 1^k, & \text{если } q = q_i, i \neq n - s, \\ 1, & \text{если } q = q_{n-s}, \\ \lambda, & \text{если } q = r_i, z = 1, \\ 1, & \text{если } q = r_s, z = \lambda, \\ 1^x, & \text{если } q = r_{s-1}, z = \lambda, \\ 1^{k-1}, & \text{если } q = r_i, z = \lambda, i \bmod (k-1) = 0, \\ 1^{i \bmod (k-1)}, & \text{если } q = r_i, z = \lambda, i \bmod (k-1) \neq 0, \\ \lambda, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата для $n = 8$ и $k = 3$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η , то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z , автомат записывает на выходную ленту пару (q, z) , а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η . Следующее состояние указывает стрелка.



Опишем функционирование описанного выше автомата P_0 и поясним его канонические уравнения. Состояния автомата поделены на две группы: $\{q_1, \dots, q_{n-s}\}$ — состояния в которых происходит наполнение магазина, и состояния $\{r_1, \dots, r_s\}$ — в которых происходит опустошение магазина. Автомат начинает свою работу из состояния r_s с пустым магазином. Далее автомат переходит в первую группу состояний, где происходит запись в магазин, после заполнения автомат переходит во вторую группу состояний, а именно: в состояние q_1 с одним записанным символом в магазине. Далее происходит опустошение. После чего подобные итерации повторяется с той лишь разницей, что каждую последующую итерацию количество записанных в магазин символов увеличивается на 1 вплоть до значения $s-1$. После стирания $s-1$ символа автомат опять попадает в состояние r_s .

Аналогично предыдущему примеру получаем, что

$$L(P_0) = \frac{(s-1)s}{2} + (s-1)(n-s) + x - \sum_{i=0}^{s-2-x} \left[\frac{i}{k-1} \right]$$

Оценим $L(P_0)$, пользуясь леммой из предыдущего примера, и упростим выражение:

$$L(P_0) \geq \frac{(s-1)s}{2} + (s-1)(n-s) + x - \frac{(s-x)^2}{2(k-1)} - \frac{3(s-x)}{2} \geq sn - \frac{s^2k}{2(k-1)} - s.$$

Далее подставим оценки на s :

$$L(P_0) \geq n(n-2 - \frac{n-3}{k}) - \frac{(n-1 - \frac{n-3}{k})^2 k}{2(k-1)} + (n-1 - \frac{n-3}{k}) \geq \frac{k-1}{2k} n^2 - 3n - 2.$$

Замечание. Нижняя оценка, полученная в примере, асимптотически совпадает с доказанной верхней оценкой при $n \rightarrow \infty$.

5.4. Дополнительные определения

Перейдем к рассмотрению основного случая, когда в автомате с магазинной памятью есть стирающие автоматные циклы.

Пусть в автомате P из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ есть хотя бы один автоматный цикл. Выберем любой и обозначим C . Тогда для $q \in C$ определим множество состояний $W(q) \subseteq Q \setminus C$, из которых можно попасть в стирающий цикл через q :

$$W(q) = \{q' \in Q \setminus C \mid \exists t_1, t_2 : q(t_1) = q', q(t_2) = q, \forall t : t_1 \leq t < t_2, \gamma(t) \neq \lambda, q(t) \notin C\}.$$

Заметим, что для различных $q_1 \in C$ и $q_2 \in C$ выполнено $W(q_1) \cap W(q_2) = \emptyset$. Для всех состояний из $W(q)$ будем говорить, что q является точкой входа в автоматный цикл.

Для стирающего цикла C определим множество состояний $W(C)$, которые попадают в автоматный цикл C :

$$W(C) = \bigcup_{q \in C} W(q).$$

Заметим, что для двух стирающих циклов C_1 и C_2 выполнено $W(C_1) \cap W(C_2) = \emptyset$.

Назовем окрестностью стирающего цикла множество состояний $U(C) = C \cup W(C)$. Обозначим U_0 — множество состояний, которые не лежат ни в какой окрестности стирающего цикла. Для автомата только со стирающими автоматными циклами C_1, \dots, C_d имеем следующее разложение:

$$Q = \bigsqcup_{i=1}^d U(C_i) \sqcup U_0.$$

Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ с периодом выхода τ . Пусть $q(t)$ — последовательность состояний автомата и $\gamma(t)$ — последовательность слов, записанных в магазине, заданы каноническими уравнениями. Так как эти последовательности периодические, рассмотрим их лишь на номерах от 0 до τ . Пусть t_1, \dots, t_{d+1} — множество номеров на этом отрезке, когда магазин пуст. Не ограничивая общности, будем считать, что $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_d < t_{d+1} = \tau$. Рассмотрим полуинтервал $(t_i, t_{i+1}]$, на котором функционирует автомат P . На этой последовательности тактов автомат порождает подпоследовательности состояний $\{q(t)\}_{t_i+1}^{t_{i+1}}$ и слов $\{\gamma(t)\}_{t_i+1}^{t_{i+1}}$, записанных в магазин. Эту пару подпоследовательностей назовём этапом функционирования автомата и будем обозначать I_i . Обозначим длину этапа $|I_i|$ — количество тактов работы автомата в этапе. Для P однозначно определено представление периода в виде упорядоченного множества этапов (I_1, I_2, \dots, I_d) . Обозначим это отображение $I(P)$. Описание функционирования автомата как последовательности этапов важно, так как имеет довольно интересные свойства, описываемые в следующей лемме.

Лемма 6. Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ и для него выполнено $I(P) = (I_1, \dots, I_d)$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1. Для любой перестановки σ на d элементах найдется автомат P_σ из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ такой, что его период будет описываться последовательностью этапов $I(P_\sigma) = (I_{\sigma(1)}, \dots, I_{\sigma(d)})$.

2. Для любого подмножества этапов I_{j_1}, \dots, I_{j_h} найдется автомат P' из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ такой, что $I(P') = (I_{j_1}, \dots, I_{j_h})$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что оба автомата P_σ и P' получаются из автомата P изменением его поведения на пустом магазине. \square

5.5. Случай одного стирающего цикла

Пусть в автомате P из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ есть ровно один стирающий цикл C длины ℓ со стирающим индексом $-s$. Обозначим $C_W = C \cap W$ — все пишущие состояния автоматного цикла, а $C_S = C \cap S$ — все его стирающие состояния. Пусть $C_{S_0} = \{q \in C_S \mid \exists h > \ell : (q, 1^h) \Rightarrow (q, \lambda)\}$, а $C_{S_1} = C_S \setminus C_{S_0}$. Нетрудно видеть, что $|C_{S_0}| = s$.

Для каждого состояния q из стирающего цикла C определим функцию стирания $f_C(q, h) : C \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — минимальное количество тактов необходимое для достижение пустого магазина из состояния q с записанным в магазине словом длины h . Нетрудно видеть, что если ℓ — длина стирающего цикла, а s — абсолютное значение стирающего индекса C , то

$$h + \lfloor \frac{h}{s} \rfloor (\ell - s) \leq f_C(q, h) \leq h + \lceil \frac{h}{s} \rceil (\ell - s) = f_C^{max}(h).$$

Лемма 7. В текущих обозначениях

$$\sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) = \begin{cases} h_{max} \ell - \frac{s(s-1)}{2}, & \text{если } s \leq h_{max} - (k-1), \\ \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + h_{max}(\ell - s), & \text{если } s > h_{max} - (k-1), \ell \neq n, \end{cases},$$

где $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$.

Доказательство. Если $s \leq h_{max} - (k-1)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) &= \sum_{i=0}^{s-1} f_C^{max}(h_{max} - i) = \sum_{i=0}^{s-1} \left(h_{max} - i + \lceil \frac{h_{max} - i}{s} \rceil (\ell - s) \right) = \\ &= h_{max}s - \frac{s(s-1)}{2} + (\ell - s) \sum_{i=0}^{s-1} \lceil \frac{h_{max} - i}{s} \rceil = h_{max}s - \frac{s(s-1)}{2} + (\ell - s) \sum_{i=0}^{s-1} \frac{h_{max} - i}{s} + \frac{(l-s)(s-1)}{2} = \\ &= h_{max}s - \frac{s(s-1)}{2} + h_{max}(\ell - s) = h_{max}\ell - \frac{s(s-1)}{2}. \end{aligned}$$

Если $s > h_{max} - (k-1)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) &= \sum_{i=0}^{h_{max}-k} f_C^{max}(h_{max} - i) = \sum_{i=k}^{h_{max}} f_C^{max}(i) = \sum_{i=k}^{h_{max}} \left(i + \lceil \frac{i}{s} \rceil (\ell - s) \right) = \\ &= \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s) \sum_{i=k}^{h_{max}} \lceil \frac{i}{s} \rceil = \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s) \left(\sum_{i=k}^{h_{max}-k+1} \lceil \frac{i}{s} \rceil + \sum_{i=h_{max}-k+2}^{h_{max}} \lceil \frac{i}{s} \rceil \right) = \\ &= \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s) \left(\sum_{i=k}^{h_{max}-k+1} 1 + \sum_{i=h_{max}-k+2}^{h_{max}} 2 \right) = \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s)h_{max}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 8. Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ и пусть P удовлетворяет следующим условиям:

1. в P есть единственный автоматный цикл C с отрицательным стирающим индексом;
2. вне этого цикла стирающих состояний нет, то есть $S \subseteq C$.

Тогда найдется такой автомат из P' из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$, удовлетворяющий тем же условиям, такой, что все состояния вне стирающего цикла при непустом магазине пишут ровно k символов в магазин, при этом выполнено

$$L(P) \leq L(P') + n.$$

Доказательство. Рассмотрим непустое $W(q_*)$ для некоторого $q_* \in C$. Рассмотрим все этапы, которые начинаются с состояния из $W(q_*)$. Любой такой этап можно разделить на две части: это заполнение магазина, когда текущее состояние не из стирающего цикла, и стирание магазина, когда автомат вошел в стирающий цикл. Заметим, что длина второй части зависит только от количества символов записанных в магазин. Проведем следующую трансформацию автомата. Во всех состояниях q из $W(q_*)$ сделаем $\eta(q, 1) = 1^k$, а также изменим переходы и запись в магазин по пустым состояниям стирающего цикла так, чтобы изменения коснулись только рассматриваемых этапов и для каждого рассматриваемого этапа количество символов, записанное в магазин, при первом попадании в стирающий цикл (то есть в q_*) не изменилось. Заметим, что при данной трансформации стирающая часть этапа будем иметь такую же длину, как и раньше. Может так оказаться, что количество тактов, которое автомат заполнял магазин уменьшилось. Если после трансформации среди состояний из $W(q_*)$ возникли недостижимые, то все такие состояния добавим в стирающий цикл как нейтральные сразу после q_* . Таким образом, каждый рассматриваемый этап может уменьшиться не более чем на 1.

Проводя подобные трансформации для всех непустых $W(q)$, построим требуемый автомат P' . Так как количество этапов не превосходит n , то будет верна оценка

$$L(P) \leq L(P') + n,$$

что и требовалось доказать. □

$$\text{Обозначим } L_1(n, k) = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + (8k + 32)n.$$

Утверждение 3. Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ и пусть P удовлетворяет следующим условиям:

1. в P есть единственный автоматный цикл C с отрицательным стирающим индексом;
2. вне этого цикла стирающих состояний нет, то есть $S \subseteq C$.

Тогда

$$L(P) \leq L_1(n, k).$$

Доказательство. Последовательно применяя леммы 2 и 8, далее можно рассматривать автомат P' такой, что при пустом магазине автомат P' должен писать в магазин и для которого при $q \notin C$ выполнено $\eta(q, 1) = 1^k$, при этом будет верно, что

$$L(P) \leq L(P') + 2n.$$

Так как начальное слово, записанное в магазине, пустое, то всё функционирование автомата устроено следующим образом. Из стирающего цикла при пустом магазине автомат заполняет магазин одним из двух способов: либо он выходит из стирающего цикла и заполняет магазин до тех пор, пока не попадает в стирающий цикл снова, либо, не выходя, переходит в другое состояние стирающего цикла. В стирающем цикле автомат опустошает магазин и так далее повторяется до закливания, то есть пока автомат не окажется опять в начальном состоянии с пустым магазином.

Пусть ℓ — длина стирающего цикла C . Пусть $s = |C_{S_0}|$ и $r = |C_{S_1}|$.

Пусть $I(P') = (I_1, I_2, \dots, I_{r+s})$ — упорядоченное множество этапов автомата P' таково, что последнее состояние первых s этапов из C_{S_0} . Оценим отдельно $\sum_{i=1}^s |I_i|$ и $\sum_{i=s+1}^{s+r} |I_i|$.

Начнем с $\sum_{i=s+1}^{s+r} |I_i|$. Эти этапы характерны тем, что в них автомат не проходит по всем состояниям стирающего цикла. И максимальное количество символов в магазине не более чем r . С другой стороны, можно считать, что автомат сразу находится в стирающем цикле на протяжении всего этапа. Отсюда получаем оценку

$$\sum_{i=s+1}^{s+r} |I_i| \leq L_0(\ell - s, k) \leq \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s).$$

Теперь оценим $\sum_{i=1}^s |I_i|$. Заметим, для всех этапов из рассматриваемого подмножества, в которых автомат не покидает стирающий цикл, можно оценить сверху сумму их длин как $(k+1)n$. Рассмотрим остальные этапы. Для них отдельно оценим "такты записи" и "такты стирания". Пусть $\tau_{записи}$ — количество тактов, которые начинаются либо вне стирающего цикла, либо из стирающего цикла, но с пустым магазином, а $\tau_{стирания}$ — все остальные такты работы автомата.

Рассмотрим случай, когда найдется $q_* \in C$ такое, что $W(q_*) = Q \setminus C$. Заметим, что автомат P' не сможет записать больше, чем $h_{max} = (n - \ell + 1)(k - 1) + 1$ символ в магазин. Учитывая, что внутри одного периода автомат не может оказаться в одном и том же состоянии с одинаковым содержанием магазина, получаем:

$$\tau_{стирания} \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i),$$

где $s' = \min(s, h_{max} - (k - 1))$ — количество оставшихся этапов.

Теперь оценим $\tau_{записи}$. При максимальном заполнении магазина автомат пройдет по всем пишущим состояниям. Из стирающего цикла автомат не может перейти в одно и то же состояние более не более $k - 1$ раза, кроме, тех состояний, в которые можно попасть только из стирающего цикла. В такие состояния автомат можем попасть не более k раз. Отсюда получаем, что

$$\tau_{записи} \leq (n - \ell + 1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2} \left[\frac{i}{k-1} \right]$$

Откуда получаем, что

$$\sum_{i=1}^s |I_i| \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 1)s - \sum_{i=0}^{s'-2} \left[\frac{i}{k-1} \right] + (k+1)n.$$

Пусть теперь $W(q) \neq Q \setminus C$ для всех $q \in C$. Заметим, что если $s \leq (n - k)(k - 1) + 1$, то полученные оценки остаются в силе, так как, собирая состояния $Q \setminus C$ в одном $W(q)$ достигается большая длина этапов. Если же

$s > (n - k)(k - 1) + 1$, то можно считать, что все непустые $W(q)$ для $q \in C$ содержат по одному состоянию, кроме одного, в котором лежат все остальные состояния. Этапы, которые начинаются с состояния из $W(q)$, где $|W(q)| = 1$ можно суммарно оценить сверху $2kn$, так как до входа в стирающий цикл не будет записано более $2k - 1$ символов в магазин. Таким образом можно считать, что в случае, когда $W(q) \neq Q \setminus C$ для всех $q \in C$ оценка увеличится не более чем на $2kn$

Суммируя обе оценки, получаем, что

$$L(P') \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2} \left[\frac{i}{k-1} \right] + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + 2kn.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L(P) &\leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2} \left[\frac{i}{k-1} \right] + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + 2kn + (k+1)n + 2n \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 2)s' - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k+3)n, \end{aligned}$$

где $h_{max} = (n - \ell + 1)(k - 1) + 1$ и $s' = \min(s, h_{max} - (k - 1))$.

При $s \leq (n - \ell)(k - 1) + 1$, получаем:

$$\begin{aligned} L(P) &\leq ((n - \ell + 1)(k - 1) + 1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + s(n - \ell + 2) - \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k+3)n \leq \\ &\leq \max_{\substack{1 \leq s \leq \ell \leq n, \\ s \leq (n - \ell)(k - 1) + 1}} \left(((n - \ell + 1)(k - 1) + 1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + s(n - \ell + 2) - \frac{s^2}{2(k-1)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) \right) + (3k+3)n. \end{aligned}$$

Максимизируя квадратичную функцию по s и ℓ получаем, что

$$L(P) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn + (3k+3)n = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + (8k+3)n.$$

Значит, $L(P) \leq L_1(n, k)$ в этом случае.

При $s > (n - \ell)(k - 1) + 1$ и $\ell \neq n$ получаем:

$$\begin{aligned} L(P) &\leq \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + h_{max}(\ell - s) + s'(n - \ell + 2) - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k+3)n = \\ &= \frac{k-2}{2(k-1)}h_{max} + h_{max}(n - s) + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + kh_{max} + \\ &+ \frac{7}{2}h_{max} + (k-1)(n - \ell) + 5(\ell - s) + \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2} - 2(k-1) + (3k+3)n \leq \\ &\leq nh_{max} - \frac{k-1}{k}\ell h_{max} + \frac{k-1}{2k}\ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)}h_{max}^2 + \\ &+ k(2h_{max} + 2\ell - n) + 4\ell - \frac{5}{2}h_{max} + n + 3(k-1) + \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{(k-1)^3}{2k} + (3k+3)n \leq \end{aligned}$$

$$\leqslant nh_{max} - \frac{k-1}{k}\ell h_{max} + \frac{k-1}{2k}\ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)}h_{max}^2 + 6kn + 8n + 5(k-1) + k^2 + \frac{1}{2}$$

Подставляя $h_{max} = (n - \ell + 1)(k - 1) + 1$, получаем

$$\begin{aligned} L(P) &\leqslant \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2(k-1)} + \frac{n^2}{2k(k-1)} - \frac{1}{2(k-1)} + n - k(n - \ell + 1) - \frac{1}{2} + 6kn + 8n + 5(k-1) + k^2 + \frac{1}{2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{k-1}{2k}n^2 + 6kn + 9n + 5(k-1) + k^2 \leqslant \frac{k-1}{2k}n^2 + 7kn + 14n \leqslant L_1(n, k) \end{aligned}$$

Остаётся лишь заметить, что в случае $\ell = n$, будет верна оценка

$$L(P) \leqslant L_0(n, k) + 2n + 2kn \leqslant L_1(n, k),$$

что и завершает доказательство. □

Утверждение 4. Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ и пусть в P есть единственный автоматный цикл C с отрицательным стирающим индексом. Тогда

$$L(P) \leqslant L_1(n, k).$$

Доказательство. Применяя лемму 2, далее можно рассматривать автомат P' такой, что при пустом магазине автомат P' должен писать в магазин при этом будет выполнено:

$$L(P) \leqslant L(P') + n.$$

Рассмотрим $I(P') = (I_1, I_2, \dots, I_d)$ — упорядоченное множество этапов автомата P' . Разобьём этапы на две группы. В первую включим все этапы, предпоследнее состояние которых не лежит в стирающем цикле C , во вторую все остальные. По лемме 6 найдутся такие автоматы P'_1 и P'_2 из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$, что $I(P'_1)$ будет состоять из первой группы этапов, а $I(P'_2)$ — из второй, причем будет выполнено, что

$$L(P') = L(P'_1) + L(P'_2).$$

Пусть n_0 — количество состояний в $L(P'_1)$. Тогда можно имеет место оценка

$$L(P'_1) \leqslant L_0(n_0, k) \leqslant \frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0.$$

Теперь оценим $L(P'_2)$. В P'_2 после стирающих состояний вне стирающего цикла магазин не становится пустым. Это означает, что можно трансформировать запись в магазин, не изменив при этом длину периода. Следовательно, можно считать, что автомат удовлетворяет предыдущей лемме, то есть для него верна оценка

$$L(P'_2) \leqslant \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 2)s' - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k + 2)n,$$

где $h_{max} \leqslant (n - \ell - n_0 + 1)(k - 1) + 1$ и $s' = \min(s, h_{max} - (k - 1))$.

Суммируя обе оценки, имеем

$$L(P) \leqslant L(P'_1) + L(P'_2) + n \leqslant \frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0 + \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) +$$

$$+(n - \ell + 2)s' - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k + 3)n,$$

где $h_{max} \leq (n - \ell - n_0 + 1)(k - 1) + 1$ и $s' = \min(s, h_{max} - (k - 1))$.

При $s \leq (n - \ell - n_0)(k - 1) + 1$, получаем:

$$L(P) \leq \left(\frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0 + ((n - \ell - n_0 + 1)(k - 1) + 1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + s(n - \ell + 2) - \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) \right) + (3k + 3)n,$$

Максимизируя по n_0 , ℓ и s , получаем, что

$$L(P) \leq L_1(n, k).$$

При $s > (n - \ell - n_0)(k - 1) + 1$ и $\ell \neq n$ получаем:

$$L(P) \leq \frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0 + nh_{max} - \frac{k-1}{k}\ell h_{max} + \frac{k-1}{2k}\ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)}h_{max}^2 + 3(k-1) + \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{(k-1)^3}{2k} + (3k + 3)n \leq$$

$$\leq \left(\frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0 + n - \frac{k-1}{k}\ell \right) ((n - \ell - n_0 + 1)(k - 1) + 1) + \frac{k-1}{2k}\ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)}(n - \ell - n_0)(k - 1) + (4k + 3)n + 3k$$

Максимизируя по n_0 , ℓ , получаем, что

$$L(P) \leq L_1(n, k).$$

При $\ell = n$ получаем, что $n_0 = 0$, следовательно, будет верна оценка из предыдущего утверждения, что и завершает доказательство. □

5.6. Общий случай

Теперь все готово для доказательства асимптотической верхней оценки для $L(n, 1, k)$.

Теорема 4. При $k > 1$

$$L(n, 1, k) \leq L_1(n, k).$$

Доказательство. Пусть P содержит d автоматных циклов. В случае $d = 0$ и $d = 1$ все доказано. Пусть $d \geq 1$. Заметим, что все циклы являются стирающими, и обозначим их C_1, \dots, C_d . Имеет место следующее разбиение множества состояний:

$$Q = \bigsqcup_{i=0}^d Q_i,$$

где при $i > 0$ $Q_i = C_i \cup W(C_i)$ — множество состояний, и, а Q_0 — все оставшиеся состояния, то есть множество состояний, из которых автомат не попадает ни в один стирающий цикл. Заметим, что внутри каждого этапа I все состояния лежат в одном и том же Q_i . Следовательно, для каждого Q_i можно выделить

своё подмножество этапов, для которого по лемме 6 будет существовать автомат P_i , реализующий его. Так как каждый этап автомата P воздет в $I(P_i)$, то будет выполнено, что

$$L(P) = \sum_{i=0}^d L(P_i).$$

По построению P_0 — автомат без стирающего цикла, а остальные P_i — автоматы с одним стирающим циклом. Следовательно, для каждого P_i будет выполнено $L(P_i) \leq L_1(|Q_i|, k)$. Значит,

$$L(P) \leq \sum_{i=0}^d L_1(|Q_i|, k) \leq L_1\left(\sum_{i=0}^d |Q_i|, k\right) = L_1(n, k),$$

что и требовалось доказать. □

6. Заключение

В работе была получена асимптотическая верхняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности, сгенерированной автоматом с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Построен пример автомата, на котором эта оценка достигается. Ранее автором была опубликована работа, в которой была допущена досадная неточность в доказательстве. В данной работе доказательство было полностью исправлено, что повлекло усложнение его конструкции. И хотя принципиально результат не поменялся, автор приносит свои извинения читателю.

Автор выражает благодарность Калачеву Глебу Вячеславовичу и проф. Гасанову Эльяру Эльдаровичу за продуктивные и конструктивные обсуждения, своему научному руководителю проф. Бабину Дмитрию Николаевичу за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Oettinger A., Automatic syntactic analysis and the pushdown store, в сб. Structure of Language and its Mathematical Concepts, Proc. 12th Symposium on Applied Mathematics, 1961, 104-129.
- [2] Schutzenberger M. P., On context-free languages and pushdown automata, Infor and contril, 6:3, 1963, 246-264.
- [3] Chomsky N., Context-free grammars and pushdown storage, Quarterly Progress Report, № 65, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, 1962.
- [4] Evey R.J., Applications of pushdown-store machines, Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conference, 24, 1963, 215-227.
- [5] Bar-Hillel Y., Perles M., Shamir E., On formal properties of simple phrase structure grammars. Z. Phonctik, Sprachwissensch. Kommunikationsforsch. 14, 1961, 143-172
- [6] Ginsburg S., Rose G.F., Some recursively unsolvable problems in ALGOL-like languages, J. Assoc. Computing Machinery, 10, 1963, 175-195.

- [7] Ginsburg S., Greibach S., Deterministic context free languages, *Information and Control*, Volume 9, Issue 6, 1966, 620-648.
- [8] L.G. Valiant, M.S. Paterson, Deterministic one-counter automata, *J. Comput. System Sci.* 10 (1975) 340-350.
- [9] M. Oyamaguchi, The equivalence problem for real-time d.p.d.a's, *J. Assoc. Comput. Mach.* 34 (1987) 731-760.
- [10] S. Bohm, S. Goller, P. Jancar, Equivalence of deterministic one-counter automata is NL-complete, in: *Proc. of STOC*, ACM, 2013, pp. 131–140.
- [11] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.:Наука, 1985.
- [12] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции. *Дискретная математика*. том 1, 4, 1989, 423-431.
- [13] Иванов И.Е. Некоторые классы функций, вычисляемые автоматами. *Интеллектуальные системы*, том 15, вып. 1, 2011, 361-378.
- [14] Иванов И. Е. Улучшение нижней оценки на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью. *Интеллектуальные системы*, том 20, вып. 4, 2016, 174-187.

7. Дополнения: решение экстремальных задач

Лемма 9. Пусть

$$g(n, k) = \max_{s, \ell} \left((n - \ell + 1)(k - 1) + 1 \right) \ell - \frac{s(s - 1)}{2} + s(n - \ell + 2) - \frac{s^2}{2(k - 1)} + \frac{k - 1}{2k} (\ell - s)^2 + 5(\ell - s).$$

$$1 \leq s \leq \ell \leq n,$$

$$s \leq (n - \ell)(k - 1) + 1$$

$$\text{Тогда } g(n, k) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

Доказательство. Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через f . Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = n - 2\ell + \frac{\ell - s}{k} - \frac{s}{k-1} - 5/2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = 3\ell - n - 2s + k(n - 2\ell + 1) - \frac{(\ell - s)}{k} + 5 = 0 \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений не имеет решений, поэтому продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Пусть $s = 1$. При $s = 1$

$$f = 5\ell + n - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(\ell-1)^2}{2k} + \ell(k-1)(n-\ell+1) - 3.$$

1.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 3\ell - n + k(n - 2\ell + 1) - \frac{\ell - 1}{k} + 3 = 0.$$

Откуда находим:

$$\ell = \frac{3k - kn + k^2 n + k^2 + 1}{2k^2 - 3k + 1}.$$

Подставляя в f получаем:

$$\frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + \frac{kn}{2} + \frac{11n}{4(2k-1)} + \frac{11n}{4} + \frac{k}{4} + \frac{12}{k-1} - \frac{121}{8(2k-1)} - \frac{5}{8} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

1.2. Рассмотрим границу $\ell = 1$. Подставляя в f , получаем:

$$kn - \frac{1}{2(k-1)} + 2 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

1.3. Рассмотрим границу $\ell = n$. Подставляя в f , получаем:

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

2. Пусть $s = (n - \ell)(k - 1) + 1$. При $s = (n - \ell)(k - 1) + 1$

$$f = \frac{5\ell}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{7k\ell}{2} - \frac{5kn}{2} - \frac{(n-1)^2}{2k} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{2}.$$

2.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{7k}{2} + \frac{5}{2} = 0.$$

Критических точек нет, поэтому будем искать максимум на границе, а именно: $\ell = 1$ и $\ell = n$.

2.2. При $\ell = 1$ получаем

$$\frac{7k}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2(k-1)} - \frac{5kn}{2} - \frac{(n-1)^2}{2k} + \frac{n^2}{2} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

2.3. При $\ell = n$ получаем

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3. Пусть $s = \ell$. При $s = \ell$

$$f = \frac{\ell(2k - \ell - 2k\ell + 2kn + 5)}{2} - \frac{\ell^2}{2(k-1)}.$$

3.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = k(n - 2\ell + 1) - \ell - \frac{\ell}{k-1} + 5/2 = 0.$$

Откуда находим:

$$\ell = \frac{(k-1)(2k + 2kn + 5)}{2k(2k-1)}.$$

Подставляя в f , получаем:

$$\frac{(k-1)(2k + 2kn + 5)^2}{8k(2k-1)} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Рассмотрим граничные значения ℓ .

3.2. Случай $\ell = 1$ уже был рассмотрен в 1.2.

3.3. При $\ell = n$ получаем

$$\frac{n(2k - n + 5)}{2} - \frac{n^2}{2(k-1)} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

4. Теперь s не лежит на границе. Пусть $\ell = n$. При $\ell = n$

$$f = 5n - 3s + kn - \frac{s(s-1)}{2} - \frac{s^2}{2k-2} + \frac{(n-s)^2(k-1)}{2k}.$$

Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{n-s}{k} - n - \frac{s}{k-1} - \frac{5}{2} = 0.$$

Откуда находим:

$$s = -\frac{(k-1)(5k - 2n + 2kn)}{2(2k-1)} < 0.$$

Следовательно, подставим граничное значение s , а именно: $s = 1$. Подставляя, получаем:

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + \left(\frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3\right) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Во всех случаях получили верхнюю оценку

$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn,$$

что и требовалось доказать.

□

Лемма 10. Пусть

$$g(n, k) = \max_{s, \ell, n_0} \left(\frac{k-1}{2k} n_0^2 + 5n_0 + ((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + \right. \\ \left. 1 \leq s \leq \ell \leq n, \right. \\ \left. s \leq (n-\ell)(k-1)+1, \right. \\ \left. 0 \leq n_0 \leq n-\ell \right. \\ \left. +s(n-\ell+2) - \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) \right).$$

$$\text{Тогда } g(n, k) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

Доказательство. Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через f . Найдем критические точки:

Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = n - 2\ell + \frac{\ell-s}{k} - \frac{s}{k-1} - \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{(k-1)(2\ell-2s)}{2k} - (k-1)(\ell-n+n_0-1) - \ell(k-1) - s + 6 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{17k+5}{2k(k-1)}, \\ s = k\left(\frac{n}{2} - \frac{5}{4}\right) - \frac{n}{4} - \frac{k(n/4+35/8)-5/2}{k(2k-1)} - \frac{63}{8}, \\ n_0 = \frac{6}{k-1} + \frac{7}{2} \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\frac{25k}{16} + \frac{5n}{8} + \frac{48}{k-1} - \frac{5kn}{4} - \frac{(2n-5)^2}{32(2k-1)} + \frac{kn^2}{4} - \frac{25}{8k} - \frac{n^2}{8} + \frac{731}{32} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Случай, когда $n_0 = 0$, уже был полностью разобран.
2. Пусть теперь $n_0 = n - \ell$. Тогда в этом случае можно оценить

$$L(P) \leq (k+1)n + L_0(n-\ell, k) + L_0(\ell-s, k) + n \leq L_0(n, k) + (k+2)n \leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

3. Пусть теперь n_0 лежит не на границе. 3.1. Пусть $s = 1$. При $s = 1$

$$f = 5\ell + n + 5n_0 - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(\ell-1)^2}{2k} - \ell(k-1)(\ell-n+n_0-1) + \frac{n_0^2(k-1)}{2k} - 3.$$

- 3.1.1. Найдем критические точки

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{(\ell-1)(k-1)}{k} - \ell(k-1) - (k-1)(\ell-n+n_0-1) + 5 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{5}{k-1} + \frac{k(n+1)-6}{k^2+2k-1}, \\ n_0 = \frac{k(k+kn-6)}{k^2+2k-1} \end{cases}$$

Подставляя в f , получаем:

$$7n + \frac{12}{k-1} - \frac{(51k)/2 - 7n + 9kn + (3kn^2)/2 - n^2/2 + 23/2}{k^2 + 2k - 1} + \frac{n^2}{2} + 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

3.1.2. Пусть $\ell = 1$. При $\ell = 1$

$$f = n + 5n_0 - \frac{1}{2k-2} + (n - n_0)(k-1) + \frac{n_0^2(k-1)}{2k} + 2$$

Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - k + 6 = 0$$

Откуда находим:

$$n_0 = \frac{k(k-6)}{k-1}.$$

Подставляя в f , получаем:

$$k(n + 11/2) - 13/(k-1) - k^2/2 - 21/2 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3.1.3. Пусть $\ell = n$. Тогда $n_0 = 0$, случай был разобран.

3.2. Пусть $s = (n - \ell)(k - 1) + 1$. При $s = (n - \ell)(k - 1) + 1$

$$f = \frac{5\ell}{2} + \frac{3n}{2} + 5n_0 - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{7k\ell}{2} - \frac{5kn}{2} + \ell n_0 - \frac{n^2 - 2n + n_0^2 + 1}{2k} + \frac{n^2}{2} + \frac{n_0^2}{2} - kln_0 - \frac{5}{2}.$$

3.2.1. Найдем критические точки

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{7k}{2} + n_0 - kn_0 + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{17k+5}{2k(k-1)}, \\ n_0 = \frac{7k+5}{2(k-1)} \end{cases}$$

Подставляя в f , получаем:

$$\frac{3n}{2} + \frac{95}{2(k-1)} - \frac{5kn}{2} - \frac{n^2 - 2n + 29/4}{2k} + \frac{n^2}{2} + \frac{169}{8} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3.2.2. Пусть $\ell = 1$. Тогда и $s = 1$, случай был рассмотрен.

3.2.3. Пусть $\ell = n$. Тогда опять $s = 1$ и случай был рассмотрен.

3.3. Пусть $s = \ell$. При $s = \ell$

$$f = 5n_0 - \ell((k-1)(\ell - n + n_0 - 1) - 1) + \ell(n - \ell + 2) - \frac{\ell(\ell-1)}{2} - \frac{\ell^2}{2k-2} + \frac{n_0^2(k-1)}{2k}.$$

3.3.1 Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \ell} = n_0 - \ell - k(2\ell - n + n_0 - 1) - \frac{\ell}{k-1}/(k-1) + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{(k-1)(12k+2kn+5)}{2k^3}, \\ n_0 = n - \frac{5}{k-1} - \frac{5}{2k^2} - \frac{2n+7}{2k} + 1 \end{cases}$$

Подставляя в f , получаем:

$$\frac{(7k + 2kn - 2k^2n - 2k^2 + 5)(7k + 2kn - 2k^2n - 22k^2 + 5)}{8k^3(k-1)} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3.3.2. Пусть $\ell = 1$. Тогда и $s = 1$, случай был рассмотрен.

3.3.3. Пусть $\ell = n$. Тогда $n_0 = 0$ и случай уже был разобран.

3.4. Пусть теперь s лежит не на границе.

3.4.1. Пусть $\ell = 1$. Тогда $s = 1$ и случай уже был разобран.

3.4.2. Пусть $\ell = n$. Тогда $n_0 = 0$ и случай уже был разобран.

Во всех случаях получили верхнюю оценку

$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

□

Лемма 11. Пусть

$$g(n, k) = \max_{\ell, n_0} \left(\frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0 + \left(n - \frac{k-1}{k}\ell \right) \left((n - \ell - n_0 + 1)(k-1) + 1 \right) + \frac{k-1}{k}n + 1 \leq \ell \leq n, \right. \\ \left. 0 \leq n_0 \leq n - \ell \right. \\ \left. + \frac{k-1}{2k}\ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)}(n - \ell - n_0)(k-1) \right).$$

$$\text{Тогда } g(n, k) \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + kn + 3n + 23.$$

Доказательство. Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через f . Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n_0} = \ell - 2n + 4n_0 - k(\ell - n + 2n_0 - 2) + (n - 2n_0)/k + 4 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = k + n_0 - kn_0 = 0 \end{cases}$$

Решая систему получаем, что

$$\begin{cases} \ell = n + \frac{6}{k-1} - \frac{n}{k}, \\ n_0 = \frac{1}{k-1} + 1 \end{cases}$$

Подставляя в f и упрощая, получаем:

$$\frac{k-1}{2k}n^2 + \frac{11}{(2(k-1))} + \frac{11}{2} \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 11.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Случай $n_0 = 0$ уже был рассмотрен.

2. Пусть теперь $n_0 = n - \ell$. При $n_0 = n - \ell$

$$f = 5n - 5\ell + kn - \ell(k-1) - \frac{k(2k-1)}{2(k-1)} + \frac{(k-1)\ell^2}{2k} + \frac{(k-1)(\ell-n)^2}{2k}.$$

Найдем критические точки:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 2\ell - k - n - \frac{2\ell - n}{k} - 4 = 0.$$

Решая уравнение, получаем:

$$\ell = k/2 + n/2 + 5/(2(k-1)) + 5/2.$$

Подставляя в f получаем:

$$3n - (13k)/4 - 27/(4(k-1)) + (kn)/2 - k^2/4 + n^2/4 - n^2/(4k) - 27/4 \leq n^2/4 + kn + 3n.$$

3. Пусть теперь n_0 не на границе.

3.1. Случай $\ell = n$ уже был рассмотрен, так как в этом случае $n_0 = 0$.

3.2. Пусть теперь $\ell = \frac{k-1}{k}n + 1$. Тогда

$$f = 5n_0 - \frac{1}{2(k-1)} + kn_0 - \frac{n^2}{2k} - \frac{n_0^2}{k} - kn_0^2 + \frac{n^2}{2} + 2n_0^2 - 1/2.$$

Найдем критические точки:

$$\frac{\partial f}{\partial n_0} = 4n_0 - \frac{2n_0}{k} - k(2n_0 - 1) + 5.$$

Решая уравнение, получаем:

$$n_0 = \frac{k^2 + 5k}{2k^2 - 4k + 2}.$$

Подставляя в f получаем:

$$\frac{k}{4} + \frac{23}{2(k-1)} + \frac{9}{(k-1)^2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2k} + \frac{5}{2} \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 23 + k/4.$$

Во всех случаях получили, что максимум ограничен:

$$\frac{k-1}{2k}n^2 + kn + 3n + 23.$$

□