Алгоритмически разрешимые случаи в задаче выразимости автоматов относительно суперпозиции

Д. Н. Бабин, А. А. Летуновский
(МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Авторы вводят понятие расширенной суперпозиции, как суперпозиции с обязательным наличием в системе «задержки» и функции Шеффера. Для расширенной суперпозиции авторам удалось доказать алгоритмическую разрешимость задачи выразимости для широкого класса автоматных функций: константных автоматных функций, групповых автоматных функций Медведева, а также линейных автоматных функций, что в случае обычной суперпозиции было алгоритмически неразрешимо.

Ключевые слова: автомат, детерминированная функция, суперпозиция.

Известно, что в общем случае работа со схемами автоматов наталкивается на существенные трудности [1]. Так в работе [2] установлена континуальность множества предполных классов для систем автоматных функций, а в работе Кратко М. И. [3] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи полноты относительно суперпозиции для конечных систем автоматных функций.

Ограничение арности (числа входов) систем автоматов, не важно, так как системы, состоящие из автоматов с двумя входами уже образуют полную систему [4].

Альтернативным подходом к полноте автоматов относительно суперпозиции является теорема Крона–Роудза [5], в которой рассматривается частный случай: автоматы с полной системой переходов и максимально возможным числом состояний. Соотношение теоремы Крона–Роудза и общего случая суперпозиции автоматов описано в [6].

Ранее в задачах полноты относительно суперпозиции и обратной связи хорошо зарекомендовал себя метод использования систем функций, содержащих фиксированную добавку [7, 8]. Такой же метод применяется нами для выразимости автоматов относительно одной только суперпозиции.

Авторы вводят понятие *расширенной* суперпозиции, как суперпозиции с обязательным наличием в системе «задержки» и функции Шеффера. Для расширенной суперпозиции авторам удалось доказать алгоритмическую разрешимость задачи выразимости для широкого класса автоматных функций: константных автоматных функций [9], групповых автоматных функций Медведева [10], а также линейных автоматных функций, что в случае обычной суперпозиции было алгоритмически неразрешимо. Выразимость линейных автоматных функций была расмотрена в работе [11].

Класс всех автоматных функций обозначим через P. Константной автоматной функцией назовем автоматную функцию, выдающую одно и тоже периодическое сверхслово на всех входных сверхсловах. Класс константных автоматных функций обозначим через K.

Автомат $A = (E_2^k, Q, E_2^l, \phi, \psi, q_0), Q \subset E_2^n$, называется *групповым*, если для любого $a \in E_2^k$ отображение $\phi_a : Q \to Q$ — биекция. Здесь $\phi_a : (q) = \phi(q, a)$. Автомат называется *автоматом Медведева*, если $B = Q$ и $\psi(q, a) = q$. Класс всех линейных автоматных функций обозначим через L. Будем обозначать замыкание системы автоматов M относительно расширенной суперпозиции через $<M>$.

Результат Кратко М. И. [3] об алгоритмической неразрешимости выразимости константных автоматов можно в наших обозначениях представить так.

Теорема. [3] *Не существует алгоритма, проверяющего выразимость константой автоматной функции суперпозициями элементов конечной системы автоматных функций.*

Теорема 1. [7] *Пусть* $M \in P$, $|M| < \infty$, $K_1 \in K$. *Тогда задача* $K_1 \in <M>$ *алгоритмически разрешима.*

Теорема 2. [8] *Пусть* $M \in P$, $|M| < \infty$, G_1 *— групповой автомат Медведева. Тогда задача* $G_1 \in <M>$ *алгоритмически разрешима.*

Теорема 3. *Пусть* $M \in P$, $|M| < \infty$, $L_1 \in L$. *Тогда задача* $L_1 \in <M>$ *алгоритмически разрешима.*

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[2] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // В кн.: Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1965. — Вып. 13. — С. 45–74.

[3] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 35–37.

[4] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции // Дискретная матетматика. — Т. 1, вып. 4. — 1989. — С. 423–431.

[5] Арбиб М. А. Алгебраическая теория автоматов, полугрупп и языков. — М.: Наука, 1975.

[6] Алешин С. В. Об одном следствии теоремы Крона–Роудза // Дискретная математика. — М.: Наука, 1999. — Т. 11, вып. 4. — С. 101–109.

[7] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.д.-функций // Математические заметки. — Т. 12, № 6. — 1972. — С. 687–697.

[8] Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 41–56.

[9] Летуновский А. А. О выразимости константных автоматов суперпозициями //Интеллектуальные системы. — 2009. — Т. 13, вып. 1–4. — С. 397–406.

[10] Летуновский А. А. О выразимости суперпозициями групповых автоматов Медведева // Интеллектуальные системы. — 2011. — Т. 15, вып. 1–4. — С. 402–412.

[11] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.