О книге «Алгебраические системы автоматов» [52]

С. В. Алешин (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Рассматриваются алгебраические системы, элементами которых являются отображения, реализуемые конечными автоматами. По богатству примеров и выразительности средств автоматы порой не уступают классическим алгебраическим системам. Полугруппы, группы, кольца, а также функциональные системы автоматов позволили решить ряд трудных математических проблем. Эти конструкции приводятся в книге наряду с примерами конкретных автоматов. Книга предназначена студентам, аспирантам, преподавателям и научным сотрудникам.

Ключевые слова: конечный автомат, алгебраическая система, группа, функциональная система.

Считается, что начало широкому потоку исследований конечных автоматов и их обобщений положили работы Э. Мура и С. Клини [1].

Автомат является ядром каждого алгоритма, например, управляющая головка машины Тьюринга — это конечный автомат с входом и выходом, так что изучение автоматов началось с момента появления работ по теории алгоритмов. Можно сказать, что реализация любого алгоритма связана с построением соответствующего конечного автомата.

Исследования по теории автоматов параллельно развивали направления, связанные, с одной стороны, с изучением языков, представимых в автоматах, регулярных (в смысле Клини) множеств, а с другой — с рассмотрением отображений множества слов во входном алфавите во множество слов в выходном алфавите, которые реализуются автоматами.

В данной книге в основном речь идет об автоматных отображениях. В первой главе рассматриваются одноместные автоматные функции. Если зафиксировать конечный алфавит A и рассмотреть множество инициальных автоматов, у которых A является входным и выходным алфавитом, то на этом множестве можно определить операцию «умножения» —

суперпозицию автоматных отображений. Операция последовательного соединения (суперпозиции), очевидно, ассоциативна, и с алфавитом A связана, таким образом, полугруппа AP_n (здесь n — мощность алфавита A) — полугруппа автоматных отображений. В состояниях автоматов из полугруппы AP_n реализуются подстановки из полугруппы P_n подстановок на алфавите A. Эта полугруппа содержит в себе группу автоматных подстановок AS_n. В состояниях автоматов из группы AS_n реализуются перестановки из симметрической группы S_n перестановок на алфавите A. Изучению многообразных и интересных свойств этих полугрупп и групп посвящена первая глава.

В кратком обзоре приведены первые теоремы о полугруппах и группах автоматов — результаты 50-х – 60-х годов (Э. Мур, Дж. Рэни, Хореш, Б. Чакань, Ф. Гечег, В. П. Заровный). Начиная с §3, излагаются результаты автора, доказывается теорема об отсутствии базиса в полугруппе AP_n.

С каждым автоматом можно связать полугруппу отображений, порожденную его инициальными подавтоматами. Примеры таких групп разбираются в §4. Автоматы предоставляют большое разнообразие групп даже при малом числе состояний, например, если каждому автомату с тремя состояниями сопоставить группу, то получится 122 неизоморфных группы. Один из этих автоматов порождает свободную группу. В §5 рассмотрен еще один пример свободной группы, которая порождена двумя автоматами с тремя состояниями.

В следующем разделе рассказывается о решении проблемы Бернсайда для периодических групп средствами теории автоматов. Приведены два автомата с тремя и восьмью состояниями, соответственно, порождающие бесконечную периодическую группу. Этот пример стал впоследствии источником многих других примеров.

Одной из интересных и до сих пор нерешенных проблем в теории автоматов является проблема порядка элемента в группе автоматных подстановок. В §7 изложены некоторые продвижения в решении этой задачи, в частности, решение для абелевых групп. Первая глава завершается теоремой о структуре группы линейных автоматов.

Во второй главе рассматриваются автоматные функции многих переменных. Теперь автоматы могут иметь несколько входов, на которые подаются буквы входного алфавита. Определив операции суперпозиции и обратной связи, получаем функциональные системы, элементами которых являются многоместные автоматные отображения — ограниченно-детерминированные функции многих переменных. Вторая глава начинается с напоминания первых теорем о свойствах таких функций. В обзоре первых результатов по проблеме выразимости в системах автоматных функций многих переменных приведена работа В. Б. Кудрявцева, в которой он построил пример функциональной системы с бесконечным множеством предполных классов и алгоритмически разрешимой проблемой полноты конечных систем.

В §11 приведена теорема о c-полных системах функций, построенные в ней системы используются во многих конструкциях второй главы. Далее рассматривается класс функций $P(1)$ многих переменных, реализуемых автоматами, у которых в каждом состоянии выходная функция зависит от одной переменной. Доказывается существование алгоритма, который для конечной системы функций $S \in AP_2$ проверяет полноту системы $\{P(1) \cup S\}$. В то же время оказывается, что существует континуальное семейство предполных классов, каждый из которых содержит $P(1)$.

В §4 приводится доказательство теоремы Д. Н. Бабина о полноте относительно суперпозиции множество а-функций двух переменных. Задачи выразимости и декомпозиции тесно связаны, и декомпозиции автоматов посвящен §13. Здесь приводятся теоремы, которые позволяют расширить класс систем а-функций, применяемых для построения полных систем. В отличие от оператора композиции, когда имеются операции суперпозиции и обратной связи, оператор суперпозиции может порождать такие замкнутые классы, которые не содержатся ни в одном из максимальных классов. Пример такого класса был указан Д. Н. Бабиным.

Третья глава отражает связь теории автоматов с теорией чисел. Представления числовых колец автоматными функциями получаются, если рассмотреть p-адические автоматы, а в качестве операций в этих кольцах также использовать автоматы. Входные последовательности автоматов можно рассматривать как p-адические (целые) числа. Из автомата-сумматора p-адических чисел с помощью суперпозиции и обратной связи получается класс линейных p-адических автоматов, вычисляющих линейные функции. Структура внутренних полугрупп одноместных p-адических автоматов рассматривается в §15. Множество p-адических автоматов образует кольцо, изоморфное кольцу рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на p.

Это дает возможность построить представление кольца матриц, элементы которых являются рациональными числами. При этом строится представление кольца целочисленных матриц и, в частности, свободной группы матриц. На этом пути возникает возможность с помощью автоматных отображений изучить широкий круг алгебраических систем. Таким образом, в книге приводятся первые теоремы теории автоматов, относящиеся к данному направлению, а далее излагаются, в основном, результаты автора, полученные им начиная с 1965 года. В книгу также включен ряд результатов учеников автора.

На начальном этапе развития теории автоматных отображений главное внимание уделялось «внутренним» вопросам теории автоматов — в основном, задачам выразимости в функциональных системах. Алгебраическая тематика, задачи из теории групп и других алгебраических систем начали активно решаться после появления работы [13], посвященной проблеме Бернсайда о периодических группах. Со временем выяснилось, что по богатству примеров и выразительности средств автоматы порой не уступают классическим алгебраическим системам. Изучение алгебраических систем автоматов в последние десятилетия приобрело новую динамику, ряд результатов нами упомянут в Заключении.

Список литературы

[1] Автоматы / Сборник статей под ред. К. Э. Шеннона, Дж. Маккарти. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1956.

[2] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16, № 6 (101). — С. 3–62.

[3] Кудрявцев В. Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1962. — Вып. 8. — С. 91–115.

[4] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1965. — Вып. 13. — С. 45–74.

[5] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Элементы теории автоматов. — М.: Изд-во МГУ, 1978.

[6] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[7] Algebraic Theory of Machines // Languages and Semigroups. — NY: Academic Press, 1968. (русский перевод: Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / Под ред. М. А. Арбиба. — М.: Статистика, 1975.)

[8] Чакань Б., Гечег Ф. О группе автоматных подстановок // Кибернетика. — 1965. — № 5. — С. 14–17.

[9] Заровный В. П. Автоматные подстановки и сплетения групп // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 3. — С. 128–144.

[10] Буевич В. А. Построение универсальной о.-д. функции от двух переменных // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1970. — Вып. 22.

[11] Алёшин С. В. О суперпозициях автоматных отображений // Кибернетика. — 1975. — № 1. — С. 29–34.

[12] Алёшин С. В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1970. — Вып. 22. — С. 33–58.

[13] Алёшин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. — 1972. — Вып. 3. — С. 56–78.

[14] Алёшин С. В. Об одном следствии теоремы Крона–Роудза // Дискрет. матем. — 1999. — Т. 11, Вып. 4. — С. 31–37.

[15] Алёшин С. В. Автоматное представление свободной группы // Дискрет. матем. — 2011. — Т. 23, Вып. 3. — С. 32–56.

[16] Алёшин С. В. Свободная группа конечных автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — Вып. 4. — С. 12–14.

[17] Алёшин С. В. Автоматы в алгебре и алгебра в теории автоматов // Современные проблемы математики и информатики. — 2009. — Т. 1, № 1.

[18] Алёшин С. В., Пантелеев П. А. Конечные автоматы и числа // Дискрет. матем. — 2015. — Т. 27, Вып. 4. — С. 3–20.

[19] Мерзляков Ю. И. О бесконечных конечно-порожденных периодических группах // ДАН СССР. — 1983. — Т. 268, № 4. — С. 803–805.

[20] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.

[21] Сущанский В. И. Периодические p-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 3. — С. 557–561.

[22] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, Вып. 1. — С. 53–54.

[23] Gupta N., Sidki S. Some infinite p-groups // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 5. — С. 584–589.

[24] Рожков А. В. К теории групп алёшинского типа // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 5. — С. 122–131.

[25] Рожков А. В. Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 5. — С. 568–605.

[26] Рожков А. В. О подгруппах бесконечных конечно порожденных p-групп // Матем. сб. — 1986. — Т. 129 (171), № 3. — С. 422–433.

[27] Рожков А. В. Проблема сопряженности в одной группе автоморфизмов бесконечного дерева // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, Вып. 4. — С. 592–597.

[28] Zuk A. Groupes engendrés par les automates // Séminaire Bourbaki, Astérisque. — 2008. — V. 317. — P. 141–174.

[29] Бабин Д. Н. О полноте двухместных о.-д. функций относительно суперпозиции // Дискрет. матем. — 1989. — Т. 1, Вып. 4. — С. 86–91.

[30] Бабин Д. Н. Простые автоматы в задаче полноты относительно суперпозиции // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 147–148.

[31] Бабин Д. Н. Классификация автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты (часть вторая). — М.: Макс Пресс, 2011.

[32] Летичевский А. А. Условия полноты для конечных автоматов // Вычисл. матем. и матем. физ. — 1961. — Т. 1, № 4. — С. 702–710.

[33] Часовских А. А. Об алгоритмической разрешимости проблемы полноты для линейных автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — Вып. 2. — С. 47–61.

[34] Малыгин В. И. О некоторых пространствах, связанных с композициями автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1988. — Вып. 4. — С. 88–90.

[35] Bondarenko I., Grigorchuk R., Kravchenko R., Muntyan Y., Nekrashevych V., Savchuk D., Šunic Z. On classification of groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet // Algebra and Discrete Math. — 2008. — № 1. — P. 1–163.

[36] Vorobets M., Vorobets Y. On a free group of transformation defined by an automaton // Geom. Dedicata. — 2007. — V. 124. — P. 237–249.

[37] Макаров В. В. О группах автоматных подстановок // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, Вып. 1. — С. 171–186.

[38] Родин А. А. О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений // Интеллектуальные системы. — 2012. — Т. 16, вып. 1–4. — С. 329–334.

[39] Летуновский А. А. О выразимости суперпозициями групповых автоматов Медведева // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 179–181.

[40] Виноградов И. В. К вопросу о порядках элементов группы автоматных подстановок // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. —С. 154–162.

[41] Бокк Н. Г. О порядке элемента в группе автоматных подстановок // Интеллектуальные системы. — 2012. — Т. 16, вып. 1–4. — С. 275-290.

[42] Лунц А. Г. P-адический аппарат теории конечных автоматов // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1965. — Вып. 14.

[43] Anashin V. The Non-Archimedean Theory of Discrete Systems // Mathematics in Computer Science. — 2012. — V. 6, № 4. — P. 395–393.

[44] Lavrenyuk Y., Mazorchuk V., Oliynyk A., Sushansky V. On braid groups acting on rooted trees and related constructions // Uppsala University Report. — 2005. — V. 7.

[45] Akhavi A., Klimann I., Lombardy S., Mairesse J., Picantin M. On the Finiteness Problem for Automaton (Semi)groups // International Journal of Algebra andComputation. — 2012. — V. 22, № 6.

[46] Gillbert P. The finiteness problem for automaton semigroups is undecidable // arXiv: 1304.2295v2. —2014.

[47] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[48] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[49] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[50] Прахар К. П. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.

[51] Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1980. — Вып. 37. — С. 5–17.

[52] Алешин С. В. Алгебраические системы автоматов. — М.: МАКС Пресс, 2016.