Об оценках мощности плоских схем для замкнутых классов булевых функций

Г. В. Калачев (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Статья посвящена мощностной сложности плоских схем, реализующих функции из замкнутых классов. Плоскую схему можно представлять, как укладку схемы из функциональных элементов на целочисленную решётку на плоскости таким образом, что провода заменяются на клеточные элементы, реализующие тождественные функции. В качестве меры мощности схемы рассматривается средний и максимальный потенциал, равный среднему и, соответственно, максимальному количеству единиц на выходах элементов схемы. Будет сформулирована теорема о порядке функции Шеннона потенциала для класса монотонных функций и показано, как с учётом этого результата получаются оценки функции Шеннона для остальных замкнутых классов.

Ключевые слова: плоские схемы, клеточные схемы, активность схем, мощность схем, функция Шеннона, классы Поста, монотонные булевы функции.

Плоская схема — это схема из функциональных элементов, уложенная на плоскость так, чтобы каждому входу и выходу соответствовала некоторая сторона клетки, в которой находится элемент. В такой схеме могут использоваться любые функциональные элементы, у которых в сумме не более четырех входов и выходов. Кравцов С. С. в работе [1] показал, что порядок площади плоских схем, реализующих булевы функции от n переменных, равен 2^n. Мы в качестве меры сложности будем рассматривать максимальную, а также среднюю мощность, выделяемую схемой, когда на ее вход подается случайная последовательность с равномерным распределением вероятностей. В работе [2] было показано, что порядок функции Шеннона мощности плоских схем, реализующих функции от n переменных, равен $2^{n/2}$.

В этой работе исследуется порядок функции Шеннона средней и максимальной мощности плоских схем для класса монотонных функций, и как следствие получаются порядки функции Шеннона для всех замкнутых классов.

Также доказана нижняя оценка мощности плоских схем для класса монотонных функций в монотонном базисе.

Чтобы сформулировать результаты, введем несколько определений. Рассмотрим плоскую схему K, реализующую булеву функцию от n переменных. Входы схемы K, а также выходы всех ее элементов назовем *узлами* схемы K. Функцию, реализуемый схемой K обозначим f_K. *Потенциалом* схемы K *на наборе* x назовем количество узлов схемы K, принимающих значение 1, когда на вход схемы подан набор x, будем обозначать эту величину $u_K(x)$.

Максимальным потенциалом схемы K назовем величину $\widehat{U}(K) = \max\limits_{x\in\{0,1\}^n} u_K(x)$.

Средним потенциалом схемы K назовём величину $U(K) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{x\in\{0,1\}^n} u_K(x)$.

Потенциал функций будем определим в общем случае, если на схему может быть наложено ограничение. *Ограничением* мы называем некоторое множество Q допустимых плоских схем.

Максимальным потенциалом булевой функции f при ограничении Q назовем величину $\widehat{U}_Q(f) = \min\limits_{K\in Q: f_K=f} \widehat{U}(K)$.

Средним потенциалом булевой функции f назовём величину $U_P(f) = \min\limits_{K\in Q: f_K=f} U_P(K)$.

Если ограничений не накладывается, то есть Q — множество всевозможных плоских схем, то индекс Q будем опускать.

Введем функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала функций из класса $\mathcal{F}$:

$$\widehat{U}_Q(\mathcal{F}, n) = \max_{f\in\mathcal{F}\cap P_2(n)} \widehat{U}_Q(f), \quad U_Q(\mathcal{F}, n) = \max_{f\in\mathcal{F}\cap P_2(n)} U_Q(f).$$

За M будем обозначать класс монотонных функций. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.

$$\widehat{U}(M, n) \asymp \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, \quad U(M, n) \asymp \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} \textit{ при } n \to \infty.$$

Здесь стоит отметить, что в отличие от P_2 для класса монотонных функций средняя и максимальная мощность отличаются по порядку. Доказательство теоремы здесь не приводим, поскольку оно является достаточно громоздким.

Сформулируем и докажем следствие из теоремы **??**. Из результатов для класса монотонных функций и для P_2 можно получить порядок мощности для всех замкнутых классов. Чтобы сформулировать этот результат, разобьём все замкнутые классы[1] на 4 множества (рис. **??**).

$$\begin{aligned}
R =& \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}, I^\mu, I_1^\mu, I^\infty, I_1^\infty, O^\mu, O_0^\mu, O^\infty, O_0^\infty\};\\
R_M =& \{M, M_0, M_1, M_{01}, SM, MI^\mu, MI_1^\mu, MI^\infty,\\
& \qquad MI_1^\infty, MO^\mu, MO_0^\mu, MO^\infty, MO_0^\infty\};\\
R_L =& \{K, K_0, K_1, K_{01}, L, L_0, L_1, L_{01}, SL, D, D_0, D_1, D_{01}\};\\
R_C =& \{U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1\}.
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Если F — замкнутый класс, то есть 4 случая.*

1) *Если $F \in R$, то $\widehat{U}(F, n) \asymp U(F, n) \asymp 2^{n/2}$ при $n \to \infty$.*
2) *Если $F \in R_M$, то $\widehat{U}(F, n) \asymp \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}$, $\quad U(F, n) \asymp \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}$ при $n \to \infty$.*
3) *Если $F \in R_L$, то $\widehat{U}(F, n) \asymp U(F, n) \asymp n$ при $n \to \infty$.*
4) *Если $F \in R_C$, то $\widehat{U}(F, n) = O(1)$, $\quad U(F, n) = O(1)$.*

Доказательство приведём для среднего потенциала. Для максимального потенциала оно полностью аналогично.

Сведение задачи для классов из R к P_2. Подрешётка классов R имеет максимальный элемент P_2 и минимальные элементы I_1^∞, O_0^∞ и S_{01} (см. рисунок **??**). Для максимального элемента имеем $\widehat{U}_{P_2}(n) \asymp U_{P_2}(n) \asymp 2^{n/2}$. Осталось показать, что для минимальных элементов нижняя оценка такая же по порядку. Для этого достаточно выразить произвольную функцию из P_2 через функции из каждого из этих классов.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_O(x_1, \ldots, x_n, 1, 0) = \\ = g_I(x_1, \ldots, x_n, 0, 1) = g_S(x_1, \ldots, x_n, 0, 1), \quad (1)$$

[1] Обозначения замкнутых классов взяты из [**?**]

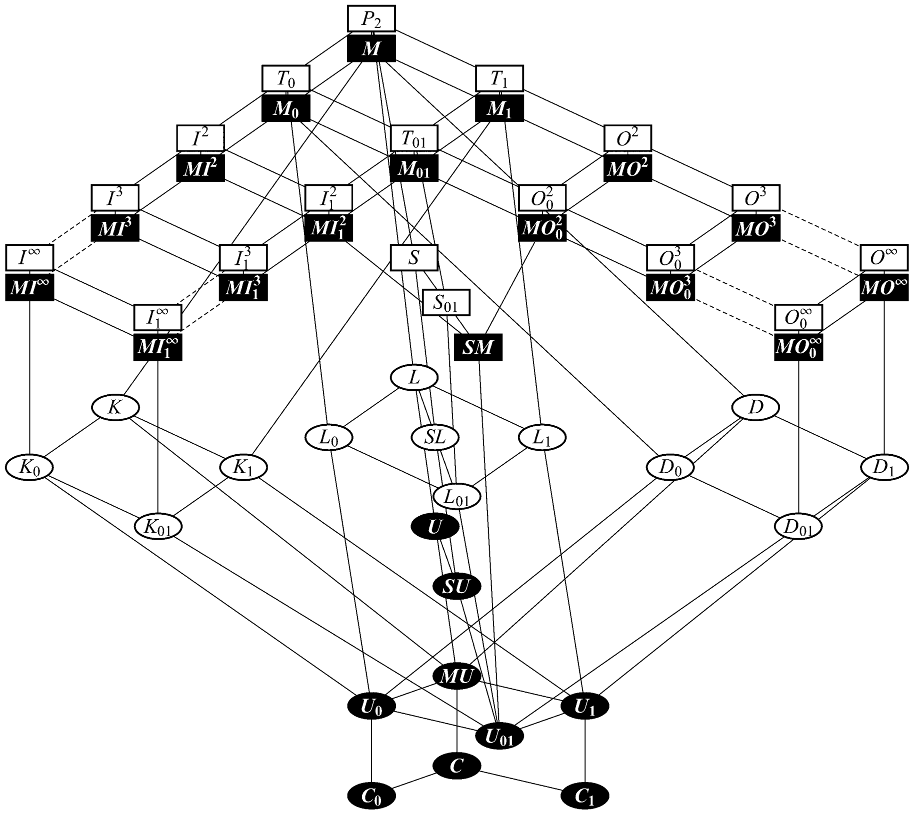

Рис. 1. Разбиение множества замкнутых классов на группы: R (белые прямоугольники), R_M (чёрные прямоугольники), R_L (белые эллипсы), R_C (чёрные эллипсы).

где

$$g_O(x_1, \dots, x_n, y, z) = f(x_1, \dots, x_n) y \vee z \qquad \in O_0^\infty. \tag{2}$$

$$g_I(x_1, \dots, x_n, y, z) = (f(x_1, \dots, x_n) \vee y) z \qquad \in I_1^\infty. \tag{3}$$

$$g_S(x_1, \dots, x_n, y, z) = f(x_1, \dots, x_n)\overline{y}z \vee \overline{f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)}y\overline{z} \vee yz \quad \in S_{01}. \tag{4}$$

Таким образом, любую функцию от n переменных можно путём подстановки констант выразить через функции из классов I_1^∞, O_0^∞ и S_{01}. Поскольку подстановка констант не увеличивает потенциал схемы, то $U(P_2, n) \leqslant U(F, n+2)$, если $F \in R$.

В итоге для $F \in R$ получаем $U(P_2, n) \geqslant U(F, n) \geqslant U(P_2, n-2)$, то есть $U(F, n) \asymp 2^{n/2}$.

Сведение задачи для классов из R_M к M. Подрешётка классов R_M имеет максимальный элемент M и минимальные элементы MI_1^∞, MO_0^∞ и SM. Сведение полностью аналогично предыдущему. Здесь только нужно заметить, что если функция f монотонна, то функции g_I, g_O, g_S, определяемые соотношениями (**??**) – (**??**), тоже являются монотонными. Для функций g_O и g_I это очевидно. Проверим для функции g_S.

При фиксированных y и z функция g_S может быть равна 0, либо $f(x_1,\ldots,x_n)$, либо $\overline{f(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)}$ либо 1. Если f монотонна, то все эти функции также монотонны.

Монотонность по y и z следует из того, что $g_S = 0$ при $y = z = 0$ и $g_S = 1$ при $y = z = 1$.

По аналогии с предыдущем случаем, при $F \in R_M$ получаем $U_M(n) \geqslant U_F(n) \geqslant U_M(n-2)$, то есть $U_F(n) \asymp \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}$.

Остальные классы. Функции из классов K, L, D реализуются тривиальным образом схемами из клеточных элементов с линейной площадью. Поскольку потенциал по порядку не превосходит площадь, он тоже будет линейным.

Нижняя линейная оценка среднего потенциала для классов из R_L следует из того, что в каждом из классов R_L есть функция, у которой не менее, чем $n-1$ существенная переменная. Для реализации такой функции нужна схема, у которой $\geqslant n-1$ входов. На каждый вход с вероятностью $1/2$ подаётся 1, то есть потенциал на входах схемы будет не менее $(n-1)/2$.

В классах из R_C все функции имеют не более одной существенной переменной, и реализовать их можно схемой из одного элемента с мощностью $O(1)$. Теорема доказана.

Таким образом, все замкнутые классы делятся на 4 группы. Порядок мощности в любом замкнутом классе либо такой же, как в P_2, либо как в классе монотонных функций, либо линейный, либо константный.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

[1] Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1967. — Вып.19. — С. 285–293.

[2] Калачев Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 1. — С. 49–74.

[3] Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008.