Пропозициональные исчисления как средство задания логических процессов

Г. В. Боков (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Доклад посвящен заданию логических процессов средствами пропозициональных исчислений. Будет рассказано о том, как логические системы задаются исчислениями, условия существования такого задания, свойства решетки логических систем, порожденных исчислениями, условия разрешимости проблемы вывода для пропозициональных исчислений и сложность этого вывода.

Ключевые слова: пропозициональные исчисления, логические системы, проблемы вывода, сложность вывода.

Одной из актуальных задач математики является создание и развитие интеллектуальных систем и логического аппарата, обладающих способностью к обучению, рассуждению и другим отличительным признакам человека. В первую очередь это обусловлено, с одной стороны, возросшей сложностью технических средств, для функционирования которых затрачиваются огромные человеческие усилия, с другой — спецификой возникающих сегодня задач, решить которые практически невозможно как без супервычислительных мощностей, так и без человека. Поэтому необходимы интеллектуальные системы, способные самостоятельно решать поставленные задачи, а не перекладывать их на человека. О важности этого свидетельствует открытый в 2013 году в Женеве проект «Человеческий мозг»[1], которой направлен на комплексное изучения не только физического устройства мозга человека, но и его способности к рассуждению.

Основой создания интеллектуальной системы является исследование и моделирование логических процессов. Как отмечает А. С. Подколзин [?], «Логические процессы занимают центральное место в поведении любых интеллектуальных систем, и прогресс в развитии искус-

[1] Human Brain Project, `https://www.humanbrainproject.eu`.

ственного интеллекта в значительной степени определяется прогрессом в развитии техники моделирования логических процессов». Зачастую исследование логических процессов сопряжено с серьезными трудностями поиска адекватных моделей представления процесса рассуждения человека. Наличие таких сложных особенностей связано с тем, что модель должна, во-первых, быть простым средством задания рассуждений, а, во-вторых, обладать достаточно богатыми выразительными способностями для представления с их помощью логических процессов.

Попытки исследования логических процессов математическими методами привели к появлению и развитию математической логики. Основные идеи качественного исследования понятия рассуждения восходят к фундаментальным работам Г. Фреге [**?**] и построенному на их основе грандиозному зданию «Principia Mathematica» [**?**]. В основе исследования лежит изучение процесса рассуждения в терминах так называемых пропозициональных исчислений. *Пропозициональное исчисление* представляет собой множество формул с некоторым набором правил, применимых к этим формулам и приводящих к получению других формул. Формулы служат формальной записью суждений, а правила отражают процесс рассуждения. Первоначально, конструкции такого рода служили только моделями для изучения рассуждений человеке, но с появлением электронных вычислительных машин и развитием математической кибернетики область их применимости значительно возросла, начиная с изучения реальных вычислительных систем, таких как схем из функциональных элементов [**?**], и заканчивая моделированием логических процессов и искусственного интеллекта [**?**].

Пропозициональное исчисление является частным случаем логической системы, как пары $\langle M, \Omega \rangle$, где M — множеством объектов системы, а Ω — множество допустимых операций над объектами системы. Важно отметить, что такое представление оказалось вполне естественным для интеллектуальных систем. Например, множество функций с операцией суперпозиции [**?**], множество автоматных функций с операциями композиции и обратной связи [**?**] и др. Логическая конкретизация данной конструкции впервые была дана в работах А. Тарского [**?**]. Он ввел на множестве формул операцию присоединения следствий C и определил оператор замыкания Cn, порожденный C и операцией подстановки. Пропозициональным исчислением в этой случае выступает всякое множество формул X, замкнутое относительно операций присоединения следствий и подстановки, то есть $X = Cn(X)$. В терминологии Тарского замкнутые классы $Cn(X)$ называются дедуктивными системами.

Изучению логических и алгебраических свойств операции C посвящены фундаментальные работы Р. Вуйицкого [?] и Я. Челаковского [?].

С таким понятием логической системы $\langle M, \Omega \rangle$ связан целый ряд задач фундаментального характера, которые, как правило, раскрывают содержательную суть рассматриваемой системы. К таких задачам относится в первую очередь описание выразительных свойств системы. Выразимость $M_1 \vdash_{\Omega'} M_2$ между объектами $M_1, M_2 \subseteq M$ в логической системе $\langle M, \Omega \rangle$ означает возможность получения одних из них M_2 через другие M_1 посредством заранее определенного набора правил $\Omega' \subseteq \Omega$. *Общая проблема выразимости* для логической системы $\langle M, \Omega \rangle$ состоит в описании всех таких пар конечных множеств объектов $M_1, M_2 \subseteq M$, для которых все элементы одного множества можно выразить через элементы другого множества, то есть $M_1 \vdash_{\Omega} M_2$. С появлением таких разнообразных моделей рассуждений, как классическая логика $\mathbf{C_2}$ [?], интуиционистская логика $\mathbf{H}$ [?], модальные логики [?], логика доказуемости [?] и другие, довольно быстро стало понятно, что свойство выразимости играет ключевую роль в исследовании логических процессов.

Можно выделить два направления в решении общей проблемы выразимости для логических систем: *функциональный*, когда на первый план выходит изучение функциональных свойств системы и где рассматриваются такие понятия, как замкнутые классы, полнота, предполнота, базисы и т. п.; и *логический*, в котором происходит изучение системы как объекта в виде системы аксиом и правил вывода.

Первый подход практически сразу показал свою эффективность в изучении функциональных свойств конечнозначных логик. Основополагающую роль в решении проблемы функциональной выразимости для классической логики $\mathbf{C_2}$ играет результат Э. Л. Поста 1921 года [?]. Он изучил отношение выразимости для случая двузначной логики и полностью описал структуру всех замкнутых (относительно суперпозиции) классов булевых функций, названных впоследствии классами Поста. При переходе от двузначных логик к многозначным обнаружились принципиальные отличия в выразимости одних объектов через другие. Попытка обозрения замкнутых классов функций для многозначной логики натолкнулась на принципиальные трудности, связанные с континуальным обилием замкнутых классов, обнаруженных Ю. И. Яновым и А. А. Мучником [?]. Аналогичные трудности были обнаружены М. Ф. Раца [?] даже в простейшей неклассической логике первой матрицы Яськовского.

Зачастую не всегда для рассматриваемой логической системы удается решить проблему выразимости для произвольных объектов. Для таких систем принято рассматривать частный случай проблемы выразимости, а именно, проблему полноты. Проблема полноты состоит в описании таких множеств объектов рассматриваемой системы, отправляясь от которых можно получить посредством заранее определенного набора правил все объекты данной системы. Для классической логики $\mathbf{C_2}$ проблема полноты относительно операции суперпозиции была полностью решена Э. Л. Постом [**?**]. Для многозначной логики ее решение свелось к получению критериев полноты в терминах так называемых предполных классов. Рядом авторов (С. В. Яблонским, А. И. Мальцев, А. В. Кузнецовым, Ло Чжу-Каем, Я. Розенбергом [**?**] и др.) были последовательно построены в явном виде все предполные классы. Завершающее построение при этом провел Я. Розенберг [**?**] в 1970 году.

Успехи функционального подхода для классической логики $\mathbf{C_2}$ привели к тому, что в надежде полного описания всех пропозициональных исчислений решение общей проблемы выразимости в логическом подходе было сведено к изучению различных классов логик, обладающих хорошими металогическими свойствами. Известен огромный спектр таких классов логик, каждый из которых представляет особый интерес. Достаточно упомянуть классы многозначных логик, предложенные Я. Лукасевичем [**?**], класс льюисовских модальных логик [**?**] и др. Вскоре стало ясно, что различных логик гораздо больше. К. Гедель [**?**] построил счетное семейство логик между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{C_2}$, которые впоследствии стали называть *суперинтуиционистскими* логиками, С. Скрогс [**?**] описал нормальные расширения модальной логики $\mathbf{S_5}$, а М. Дамметт и Е. Леммон [**?**] рассмотрели логики между $\mathbf{S_4}$ и $\mathbf{S_5}$. Тем не менее, поскольку в то время предполагалось существование счетного числа логик, то сохранялась надежда, что их все можно описать и изучить. Даже Э. Л. Пост сначала считал, что поскольку каждую k-значную функцию при $k \geqslant 3$ можно представить как вектор-функцию двузначной логики, а множество замкнутых классов таких функций счетно, то множество замкнутых классов функций k-значных логик при $k \geqslant 3$ также счетно. Но эти надежды были разрушены В. А. Янковым [**?**], открывшим континуальное семейство суперинтуиционистских логик.

Решение общей проблемы выразимости как в функциональном, так и в логическом подходе натолкнулось на континуальное обилие замкнутых классов и логик в большинстве рассматриваемых систем. Как уже было упомянуто выше, в таких случаях обычно переходят к решению частных случаев проблемы выразимости. Однако, современные методы использования соответствия Галуа для предикатного задания клонов конечнозначных функций позволили частично преодолеть трудность описания континуальных семейств. В этой связи весьма примечателен результат Д. Н. Жука [?, ?], который описал континуальную решетку замкнутых классов самодвойственных функций трехзначной логики. В отличие от функционального подхода, в логическом подходе до недавнего времени не было попыток такого описания [?].

Проблема выразимости для пропозициональных исчислений впервые была поставлена А. Тарским в 1946 году на конференции по проблемам математики, посвященной двухсотлетию Принстонского университета [?]. Уже в 1949 году С. Линиал и Э. Л. Пост [?] опубликовали короткую заметку, в которой без доказательства сформулировали гипотезу об алгоритмической неразрешимости проблемы полноты для классического исчисления высказываний. Доказательство данного результата постепенно было восстановлено последующими авторами (М. Дэвисом, В. Е. Синглетари и М. К. Интемой [?]). Независимо от них в 1958 году Р. Харроп [?] построил конечную систему аксиом над двумя бинарными связки и конечное множество правил вывода, для которых проблема выразимости алгоритмически неразрешима. Следующим продвижением в этом направлении был отказ от фиксирования логических связок. Так, в 1963 году М. Д. Глэдстоун [?] обобщил результат Линиала и Поста на случай произвольной конечной системы связок, из которых выразима импликация. При этом он заменил правило *modus ponens* на его синтаксический аналог. Независимо от Линиала и Поста в 1963 году А. В. Кузнецов [?] доказал алгоритмическую неразрешимость целого класса задач для пропозициональных исчислений с правилом modus ponens, куда входит проблема эквивалентности, проблема полноты и выразимости.

В скором времени было понято, что алгоритмическая неразрешимость проблемы выразимости для пропозициональных исчислений имеет массовый характер. Ключевым фактором, определяющим алгоритмическую неразрешимость той или иной проблемы для пропозициональных исчислений, является существование неразрешимых исчислений. Так в 1964 году В. Е. Синглетари [?] построил неразрешимое исчисление высказываний над сигнатурой $\{\neg, \to\}$. В 1965 году М. Д. Глэдстоун [?] и независимо А. Ихриг [?] построили семейство пропозициональных исчислений, для которых проблема выводимости формул имеем любую степень неразрешимости. Отметим, что М. Д. Глэдстоун получил тот же результат для любой сигнатуры, из которой выразима импликация. Более сильный результат был получен В. Е. Синглетари в 1968 году [?]. Он построил неразрешимое чисто импликативное пропозициональное исчисление, аксиомы которого выводимы из формулы $x \to (y \to x)$ с помощью подстановки и modus ponens.

В свое работе А. В. Кузнецов отмечает, что 1961 году А. А. Марков (младший) предложил рассмотреть проблему выразимости и связанные с ней проблемы для чисто импликативных пропозициональных исчислений. На этом пути Р. Харроп [?] в 1964 доказал, что проблема распознавания полноты, также как и проблемы распознавания аксиоматизаций и расширений, алгоритмически неразрешима для любого пропозиционального исчисления, из которого выводимы формулы $x \to (y \to x)$ и $x \to x$. Независимо Д. Булман и М. Тапия [?] в 1972 году с помощью конструкций Синглетари [?] доказали алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания расширений для чисто импликативного фрагмента интуиционистского исчисления высказываний, то есть для пропозиционального исчисления с аксиомами

$$x \to (y \to x), \text{ и}$$
$$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)).$$

В 1994 году Г. Марчинковский [?] получил более сильный результат о том, что проблема распознавания выводимости формулы A алгоритмически неразрешима для любой формулы A, не представимой в виде $B \to B$ для некоторой формулы B. Поскольку импликативные фрагменты классического и интуиционистского исчисления высказываний порождаются одной аксиомой, то как следствие проблема распознавания расширений для них алгоритмически неразрешима. Более того, верно более сильное следствие, основанное на результате А. Тарского [?], что проблема распознавания расширений алгоритмически неразрешима для каждого пропозиционального исчисления, являющегося конечным расширением исчисления с аксиомами:

$$x \to (y \to x), \text{ и}$$
$$x \to (y \to ((x \to (y \to z)) \to z)).$$

Несмотря на большое внимание к решению частных случаев проблемы выразимости для пропозициональных исчислений, вопрос нахождения минимально-достаточных условий их алгоритмической неразрешимости до сих пор остается открытым.

Важно отметить, что впоследствии задача решения проблемы выразимости стала возникать в разнообразных логиках, задаваемых исчислениями, которые необязательно обладают адекватными конечными моделями. В этом направлении А. В. Кузнецов [?] попытался перенести отношения выразимости на случай языка формул той или иной логики путем явного использования правила замены эквивалентным в рассматриваемой логике. Общая проблема выразимости в данной логике ставится следующим образом. Требуется указать алгоритм, который по любой формуле и любой конечной системе формул языка этой логики позволял бы распознавать, выразима ли эта формула через эту систему, используя лишь правило замены эквивалентным в этой логике и ослабленное правило подстановки. М. Ф. Раца [?] рассмотрел модальные логики с точки зрения отношения выразимости и доказал, что для многих из них, в том числе для наиболее известных, какими являются логика $\mathbf{S_4}$ Люиса и логика Гржегорчика, не существует алгоритма, решающего проблему выразимости в них. Ему же удалось доказать, что для пропозициональной логики доказуемости Геделя-Леба, а также для многих ее расширений алгоритма распознавания выразимости не существует [?].

Особое внимание в изучении логических систем уделяется выделению систем образующих и базисов рассматриваемых систем. Главную роль при этом играют системы, имеющие конечное множество порождающих элементов. В своей классической работе Э. Л. Пост доказал конечную порожденность двузначных логик относительно суперпозиции. Для пропозициональных исчислений Л. Хенкин [?] доказал конечную порожденность любого импликативного фрагмента классического исчисления высказываний. Но конечная система образующих существует не всегда, даже для одного и того же оператора замыкания. Так, для случая многозначных логик относительно суперпозиции А. А. Мучник показал, что не каждая такая логика конечно порождена, а Ю. И. Янов построил замкнутый класс, не имеющий базиса.

Важную роль в решении общей проблемы выразимости играет описание структуры решетки пропозициональных исчислений. Как уже было сказано, впервые континуальное обилие логик, задающих суперинтуиционистские пропозициональные исчисления, было обнаружено В. А. Янковым. Затем А. В. Кузнецов [?] установил континуальность всякого интервала между $\mathbf{H}$ и ее собственным расширением. Континуальность нормальных расширений $\mathbf{S_4}$ была установлена Максимовой и Рыбаковым [?]. Более того, всякий интервал между модальной логикой $\mathbf{K_4}$ и ее собственным расширением также имеет мощность континуума. Подобные результаты были получены и для других неклассических логик [?]. Стоит отметить, что полученные результаты в основном имеет фрагментарный характер, хотя понимание структуры решетки пропозициональных исчислений представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Не менее важна взаимосвязь разрешимых и неразрешимых свойств пропозициональных исчислений с числом переменных в аксиомах. В 1931 году М. Вайсберг [?] показал, что не существует пропозиционального исчисления с менее чем тремя переменными, из которого выводимы все импликативные тавтологии. В 1970 М. Д. Глэдстоун [?] доказал, что множество всех тавтологий от одного или двух переменных не может быть порождено конечным множеством аксиом соответственно от одного и двух переменных. В 1975 году Ч. Е. Хигис и В. Е. Синглетари [?] доказали существование неразрешимого пропозиционального исчисления от трех переменных. Чуть позже Ч. Е. Хигис [?] построил неразрешимое пропозициональное исчисление от двух переменных. Завершающее построение для классических исчислений было сделано М. Д. Глэдстоуном [?] в 1979 году. Он доказал разрешимость всех пропозициональных исчислений от одной переменной. Неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление впервые было построено В. Б. Шехтманом [?] в 1978 году. Аксиомы этого исчисления содержали семь переменных. Значительно позже, в 1994 А. В. Чагров [?] уменьшил число переменных в неразрешимом суперинтуиционистском исчислении до четырех. Как отмечает А. В. Чагров [?], ответ на вопрос о существовании неразрешимого суперинтуиционистского исчисления получен только для случая четырех переменных и более, а для двух и трех переменных он остается открытым.

Таким образом, исследование и моделирование логических процессов тесно связано с изучением выразительных свойств пропозициональных исчислений.

Список литературы

[1] Боков Г. В. Проблема полноты в исчислении высказываний // Интеллектуальные системы. — Т. 13, вып. 1–4. — 2009. — С. 165–182.

[2] Боков Г. В. Критерий конечной порожденности пропозициональных исчислений // Дискретная математика. — Т. 25, вып. 3. — 2013. — С. 63–81.

[3] Боков Г. В. Об алгоритмической неразрешимости проблемы выразимости пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. — Т. 17, вып. 1–4. — 2013. — С. 271–292.

[4] Боков Г. В. О конечной порожденности исчисления высказываний с произвольными операциями вывода // Интеллектуальные системы. — Т. 17, вып. 1–4. — 2013. — С. 267–270.

[5] Боков Г. В. Итеративные пропозициональные исчисления // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — Т. 18, вып. 4. — 2014. — С. 99–106.

[6] Боков Г. В. О разрешимости выводимости замкнутых термов и выразимости операций над ними // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — Т. 18, вып. 3. — 2014. — С. 111–131.

[7] Боков Г. В. Об алгоритмической неразрешимости некоторых проблем распознавания для пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — Т. 18, вып. 4. — 2014. — С. 207–214.

[8] Боков Г. В. О некоторых свойствах решетки пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — Т. 19, вып. 2. — 2015. — С. 47–64.

[9] Боков Г. В. Разрешимость одно-переменных итеративных пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — Т. 19, вып. 2. — 2015. — С. 125–134.

[10] Боков Г. В. Неразрешимое суперинтуиционисткое пропозициональное исчисление от трех переменных // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — Т. 19, вып. 3. — 2015. — С. 95–100.

[11] Боков Г. В. Об одной системе Фреге // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — Т. 19, вып. 4. — 2015. — С. 155–168.

[12] Горбунов И. А., Рыбаков М. Н. Континуальные семейства логик // Логические исследования. — Т. 14. — 2007. — С. 131–151.

[13] Жук Д. Н. Решетка замкнутых классов самодвойственных функций трехзначной логики. — М.: Изд. МГУ, 2011.

[14] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[15] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[16] Кузнецов А. В. Неразрешимость общих проблем полноты, разрешимости и эквивалентности для исчислений высказываний // Алгебра и логика. — Т. 2, № 4. — 1963. — С. 47–66.

[17] Кузнецов А. В. О функциональной выразимости в суперинтуиционистских логиках // Матем. исследования. — Т. 6, № 4. — 1971. — С. 75–122.

[18] Кузнецов А. В. Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Кишинев. — 1971. — С. 225–256.

[19] Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю. Доказуемость как модальность // Актуальные проблемы логики и методологии науки. — 1980. — С. 193–230.

[20] Максимова Л. Л., Рыбаков В. В. Решетки модальных логик // Алгебра и логика. — Т. 13. — 1974. — С. 105–122.

[21] Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973.

[22] Подколзин А. С. О развитии техники моделирования логических процессов // Интеллектуальные системы. — Т. 10, вып. 1–4. — 2006. — С. 169–188.

[23] Подколзин А. С. Компьютерное моделирование логических процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[24] Раца М. Ф. О функциональной полноте в интуиционистской логике высказываний // Проблемы кибернетики. — Т. 39. — 1982. — С. 107–150.

[25] Раца М. Ф. Алгоритмическая неразрешимость проблемы выразимости в модальных логиках // Матем. пробл. киберн. — Т. 2. — 1989. — С. 71–99.

[26] Раца М. Ф. Формальное сведение общей проблемы выразимости формул в логике доказуемости Гёделя-Лёба // Дискретная математика. — Т. 14, № 2. — 2002. — С. 95–106.

[27] Чагров А. В. Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. — Т. 5. — 1994. — С. 62–108.

[28] Шехтман В. Б. Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление высказываний // Доклады Академии наук СССР. — Т. 240, № 3. — 1978. — С. 549–552.

[29] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.

[30] Янков В. А. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // ДАН СССР. — Т. 181, № 1. — 1968. — С. 33–34.

[31] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. — Т. 127, № 1. — 1959. — С. 44–46.

[32] Bokov G. V. Undecidability of the problem of recognizing axiomatizations for propositional calculi with implication // Logic Journal of the IGPL. — Vol. 23, no. 2. — 2015. — P. 341–353.

[33] Bokov G. V. On the number of variables in undecidable superintuitionistic propositional calculi // Logic Journal of the IGPL. — Vol. 24 (5). — 2016. — P. 774–791.

[34] Bokov G. V. Undecidable problems for propositional calculi with implication // Logic Journal of the IGPL. — Vol. 24 (5). — 2016. — P. 792–806.

[35] Bollman D., Tapia M. On the recursive unsolvability of the provability of the deduction theorem in partial propositional calculi // Notre Dame Journal of Formal Logic. — Vol. 13, no. 1. — 1972. — P. 124–128.

[36] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal Logic. — Clarendon Press, 1997.

[37] Chelakowski J. Consequence operations: Foundational studies. — Warszawa: Prepublication, 1992.

[38] Dummet M., Lemmon E. Modal logics between S4 and S5 // Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik. — Bd. 5. — 1959. — S. 250–264.

[39] Frege G. Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. — Halle, 1879.

[40] Gladstone M. D. Some Ways of Constructing a Propositional Calculus of Any Required Degree of Unsolvability // Transactions of the American Mathematical Society. — Vol. 118. — 1965. — P. 192–210.

[41] Gladstone M. D. On the number of variables in the axioms // Notre Dame Journal of Formal Logic. — Vol. 11. — 1970. — P. 1–15.

[42] Gladstone M. D. The decidability of one-variable propositional calculi // Notre Dame Journal of Formal Logic. — Vol. 20, no. 2. — 1979. — P. 438–450.

[43] Gödel K. Zum intuitionistischen Aussgenkalkul // Anzeiger der Akademie der Wissenchaften Wien, Mathematisch, Naturwissenchaftliche Klasse. — Bd. 69. — 1932. — S. 65–66. (Англ. перевод: On the intuitionistic propositional calculus [**?**, P. 222–225]).

[44] Gödel K. Collected Works // Collected Works., Ed. in chief S. Feferman. — Vol. 1. — N.Y.: Oxford Univ. Press, 1986.

[45] Harrop R. On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — Vol. 54, no. 1. — 1958. — P. 1–13.

[46] Harrop R. A Relativization Procedure for Propositional Calculi with an Application to a Generalized Form of Post's Theorem // Proceedings of the London Mathematical Society. — Vol. s3-14, no. 4. — 1964. — P. 595–617.

[47] Henkin L. Fragments of the propositional calculus // J. Symb. Logic. — Vol. 14. — 1949. — P. 42–82.

[48] Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. — 1930. — P. 42–56.

[49] Hughes C. E. Two Variable Implicational Calculi of Prescribed Many-One Degrees of Unsolvability // Journal of Symbolic Logic. — Vol. 41, no. 1. — 1976. — P. 39–44.

[50] Hughes C. E., Singletary W. E. Triadic partial implicational propositional calculi // Zeitschriftfdr für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — Vol. 21. — 1975. — P. 21–28.

[51] Ihrig A. H. The Post-Lineal theorems for arbitrary recursively enumerable degrees of unsolvability // Notre Dame Journal of Formal Logic. — Vol. 6, no. 1. — 1965. — P. 54–72.

[52] Lewis C. I., Langford C. H. Symbolic Logic. — N.Y.: The Century Company, 1932.

[53] Linial S., Post E. L. Recursive unsolvability of the deducibility, Tarski's comleteness, and independence of axioms problems of the propositional calculus // Bulletin of the American Mathematical Society. — Vol. 55. — 1949. — P. 50.

[54] Łukasiewicz J. Interpretacja liczbowa teorii zdan // Ruch Filozoficzny. — T. 7. — 1922. — S. 92–93. (Англ. перевод: A numerical interpretation of theory propositions [**?**, P. 129–130]).

[55] Łukasiewicz J. Selected Works. — Warszawa: PWN, 1970.

[56] Marcinkowski J. A Horn clause that implies an undecidable set of Horn clauses // Selected papers of the 7th Workshop on Computer Science Logic (CSL '93). — Vol. 832. — 1994. — P. 223–237.

[57] Post E. L. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions // American Journal of Mathematics. — Vol. 43, no. 3. — 1921. — P. 163–185.

[58] Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

[59] Rosenberg J. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. — Vol. 260. — 1965. — P. 3817–3819.

[60] Rosenberg J. Uber die functionale Vollstandigkeit in der mehrwertigen Logiken // Rozpravy CSAV, Rada mat. prit. — Vol. 80, no. 4. — 1970.

[61] Scroggs S. J. Extentions of the Lewis system S5 // The Journal of Symbolic Logic. — Vol. 16. — 1951. — P. 112–120.

[62] Sinaceur H. Address at the Princeton University bicentennial conference on problems of mathematics (December 17–19, 1946), by Alfred Tarski // Bulletin of Symbolic Logic. — Vol. 6, no. 1. — 2000. — P. 1–44.

[63] Singletary W. E. A complex of problems proposed by Post // Bulletin of the American Mathematical Society. — Vol. 70, no. 1. — 1964. — P. 105–109.

[64] Singletary W. E. Results regarding the axiomatization of partial propositional calculi // Notre Dame Journal of Formal Logic. — Vol. 9, no. 3. — 1968. — P. 193–211.

[65] Tarski A. Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik // Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, classe III. — Vol. 23. — 1930. — P. 22–29.

[66] Tarski A., Corcoran J. Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938. — Hackett Publishing Company, Incorporated, 1983.

[67] Wajsberg M. Axiomatization of the three-valued propositional logic // Comptes Rendus des Scéances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie Classe II. — Vol. 24. — 1931.

[68] Whitehead A., Russell B. Principia Mathematica. — Cambridge, 1910–1913.

[69] Wójcicki R. Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. — Dordrecht: Kluwer, 1988.

[70] Yntema M. K. A detailed argument for the Post-Linial theorems // Notre Dame Journal of Formal Logic. — Vol. 5, no. 1. — 1964. — P. 37–50.

[71] Zhuk D. N. The lattice of the clones of self-dual functions in three-valued logic // Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. — Vol. 24, no. 1–4. — 2014. — P. 251–316.