

# Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

Г. В. Калачев

В работе рассматривается задача одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы. В качестве меры мощности рассматривается максимальный потенциал, он равен максимальному количеству выходов элементов, выдающих единицу на заданном входном наборе схемы, где максимум берётся по всем входным наборам. Показано, что при незначительных ограничениях на область определения оператора существует схема, имеющая оптимальный порядок мощности, площади и глубины. В частности, для всюду определённых операторов с  $n$  входами и  $m$  выходами порядок мощности равен  $\frac{m\sqrt{2^n}}{\sqrt{\min(m,n)}}$ , порядок глубины равен  $\max(n, \log_2 m)$ .

**Ключевые слова:** схемы из функциональных элементов, плоские схемы, клеточные схемы, мощность, глубина, функция Шеннона, верхние оценки, булевы операторы.

## Введение.

С. С. Кравцов в статье [1] ввел понятие схемы из клеточных элементов, далее также называемых плоскими схемами, и доказал, что для реализации произвольной булевой функции такой

схемой требуется  $O(2^n)$  элементов, причем существуют функции, для реализации которых необходимо порядка  $2^n$  элементов. В статье [2] определены две меры мощности схем, и показана связь между ними, а также показано, что произвольную булеву функцию от  $n$  переменных можно реализовать схемой площадью  $O(2^n)$  и мощностью  $O(2^{n/2})$ .

В данной работе кроме площади и мощности рассматривается такая важная характеристика схемы, как глубина. Глубина схемы отвечает за задержку сигнала на выходе схемы при изменении значений на входах. Обычно под глубиной схемы понимают максимальное количество логических элементов, соединённых последовательно, поскольку в основном время уходит на переключение транзисторов, реализующих логические элементы. Однако транзисторы могут быть не только в логических элементах схемы, но также в разветвлениях проводов. Там они реализуют тождественную функцию и служат для усиления сигнала. Поэтому при подсчёте глубины схемы мы будем учитывать не только логические элементы, но и разветвления проводов.

Глубину плоских схем исследовал Д.А. Жуков. В статье [5] он показал, что при незначительных ограничениях на область определения частичную функцию  $f$ , определённую на области  $\mathcal{D}$  можно реализовать плоской схемой, имеющей оптимальную по порядку площадь  $O(|\mathcal{D}|)$  и глубину  $O(\log_2 |\mathcal{D}|)$ .

В статье [3] получена нижняя оценка мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы в зависимости от ограничений на расположение выходов в схеме. В частности было показано, что если не накладывать никаких ограничений, то порядок мощности не меньше  $\frac{m\sqrt{d}}{\sqrt{\min(m, \log_2 d)}}$ , где  $d$  — размер области определения, а  $m$  — число выходов.

В данной работе показано, что для частичного оператора  $f$ , определённого на области  $\mathcal{D}$  при незначительных ограничениях на  $\mathcal{D}$  существует схема с площадью  $O(m|\mathcal{D}|)$ , мощностью  $O(\frac{m\sqrt{d}}{\sqrt{\min(m, \log_2 d)}})$  и глубиной  $O(\log_2 m|\mathcal{D}|)$ . Сравнивая эти оценки с нижними оценками из [3] видно, что такая мощность опти-

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

мальна по порядку. В статье также показано, что такие площадь и мощность также являются оптимальными по порядку.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и внимание к работе.

## Определения и обозначения.

### Плоские схемы

*Клеточным элементом* будем называть булев оператор, у которого в сумме не более четырех входов и выходов, причем каждому его входу и каждому выходу сопоставлена некоторая метка из множества  $\{l, r, t, b\}$ , причем метки не повторяются.

Метки будем также называть сторонами элемента:

- $l$  — левая сторона;
- $r$  — правая сторона;
- $t$  — верхняя сторона;
- $b$  — нижняя сторона.

Клеточный элемент будем изображать в виде единичного квадрата на плоскости. При этом входам и выходам элемента сопоставляются стороны квадрата в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами (выходами)* элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть изоляторами. Множество входов (выходов) элемента  $e$  будем обозначать  $in(e)$  ( $out(e)$ ).

Входы и выходы элемента будем называть его *контактами*.

Заметим, что это определение немного отличается от обычного тем, что допускается, чтобы на разных выходах реализовывались разные нетождественные функции.

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе — *логическим*.

Коммутационный элемент соответствует либо проводнику в микросхеме, либо пересечению проводов, либо тождественной функции, служащей для усиления сигнала.

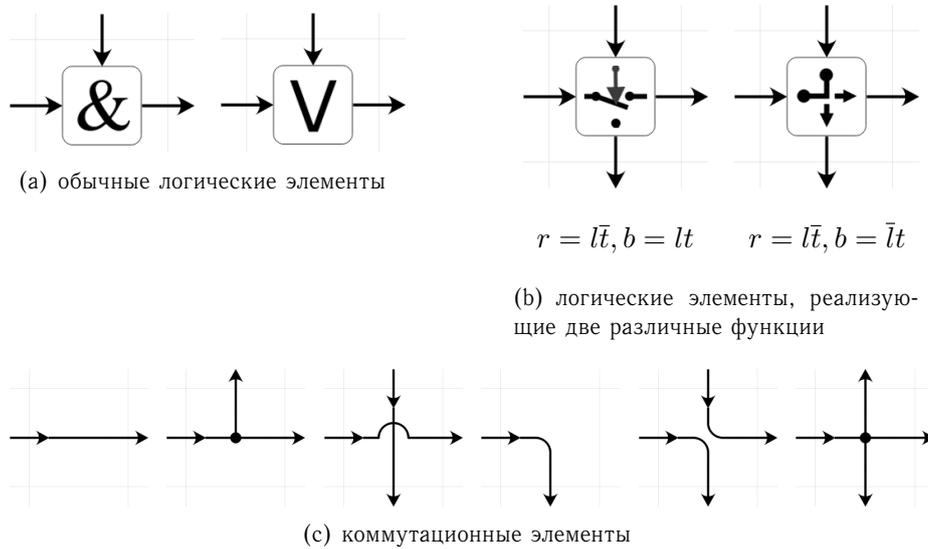


Рис. 1. Примеры клеточных элементов.

Описывать элемент будем уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки ( $l, r, t$  или  $b$ ). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую будут входить только входные метки.

На рисунке 1 приведены примеры клеточных элементов.

Для удобства введем пустой клеточный элемент — изолирующий (будем обозначать  $\lambda$ ).

Всюду далее значок  $:=$  будет обозначать «по определению равно».

За  $E$  обозначим множество всех клеточных элементов,  $N_E := |E|$ .

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

*Сетью из клеточных элементов* на множестве  $M \subset \mathbb{Z}^2$  над множеством  $E' \subseteq E$  будем называть отображение  $K : M \rightarrow E'$ , при этом  $E'$  будем называть *базисом* сети.

Элемент  $K(x, y)$  будем называть *элементом схемы  $K$  с координатами  $(x, y)$* . Элемент с приписанными ему координатами будем называть *элементом схемы*.

*Левой, правой, верхней и нижней* сторонами элемента  $e$  с координатами  $(x, y)$  будем называть точки с координатами  $(x - \frac{1}{2}, y)$ ,  $(x + \frac{1}{2}, y)$ ,  $(x, y - \frac{1}{2})$  и  $(x, y + \frac{1}{2})$  соответственно (на рисунках ось  $y$  будет направлена вниз).

Будем говорить, что сеть  $K$  из клеточных элементов корректна, если для любых двух элементов  $x$  и  $y$  схемы  $K$  верно, что если сторона  $a$  элемента  $x$  совпадает со стороной  $b$  элемента  $y$ , то выполнено одно из условий:

- один из элементов  $x, y$  — изолирующий,
- стороны  $a$  и  $b$  являются изоляторами,
- либо среди них одна является входом, другая — выходом, например,  $a$  — выход, а  $b$  — вход, в таком случае будем говорить, что выход  $a$  *подключен* к входу  $b$ ;

Множество  $M$  будем называть *носителем* сети  $K$ .

Введем понятие *графа корректной сети из клеточных элементов  $K$*  (будем обозначать  $G_K$ ).  $G_K$  — ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины  $a$  в вершину  $b$  ведет ребро в том и только том случае, когда существует элемент  $e$  такой, что  $a$  является его входом,  $b$  — выходом, причем функция, реализуемая на выходе  $b$ , существенно зависит от входа  $a$ .

*Плоской схемой* или *схемой из клеточных элементов* на множестве  $M \subset \mathbb{Z}^2$  над базисом  $E' \subseteq E$  будем называть корректную

сеть из клеточных элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество  $M$  будем называть *носителем* схемы  $K$ .

Далее везде по умолчанию используем базис  $E$ , то есть считаем, что у нас есть все клеточные элементы.

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом* (*выходом*) схемы.

*Контактами* схемы будем называть ее входы и выходы. Множество входов (выходов) схемы  $K$  будем обозначать  $In(K)$  ( $Out(K)$ ).

*Узлами* схемы  $K$  будем называть вершины графа  $G_K$ .

Если  $M$  — носитель схемы  $K$ , то величину  $|M|$ , равную количеству элементов множества  $M$ , будем называть *площадью* схемы  $K$  и обозначать  $|K|$ .

*Расстоянием между узлами* схемы будем называть расстояние между соответствующими вершинами в  $G_K$ . Расстояние от узла  $a$  до узла  $b$  на схеме  $K$  будем обозначать  $\rho_K(a, b)$ .

*Подсхемой* схемы  $K$  с носителем  $M_0 \subseteq M$  будем называть схему  $K|_{M_0}$ , получающуюся из  $K$  выбрасыванием клеточных элементов, соответствующих множеству  $M \setminus M_0$ . Если схема  $K$  фиксирована, то иногда будем говорить просто подсхема  $M_0$ .

Каждой плоской схеме  $K$  можно сопоставить схему из функциональных элементов  $Circ(K)$  следующим образом:

- 1) каждой функции  $f_{s,i}$ , которую реализует  $i$ -й выход элемента  $s$  клеточной схемы, сопоставим функциональный элемент  $e_{s,i}$ , реализующий  $f_{s,i}$ ; если  $i$ -й и  $j$ -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если  $i$ -й выход  $s_1$  подключен к  $j$ -му входу  $s_2$  соединим выход элемента  $e_{s_1,i}$  с  $j$ -ми входами элементов  $e_{s_2,k}$  для всех  $k$ , для которых  $f_{s_2,k}$  зависит от  $j$ -го аргумента;
- 3) удалим из схемы все тождественные функции, подсоединив их вход ко всем их выходам.

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

Будем говорить, что схема  $K$  реализует булев оператор  $F_K$ , если схема из функциональных элементов  $Circ(K)$  реализует  $F_K$ .

Назовем схему  $K$  минимальной над базисом  $E' \subseteq E$ , если она обладает минимальной площадью среди всех схем над базисом  $E'$ , реализующих  $F_K$ .

Обозначим  $S_{E'}(F)$  площадь минимальной схемы, реализующей оператор  $F$ . Если  $E' = E$ , то будем просто писать  $S(F)$ .

Будем говорить, что плоские схемы  $K_1$  и  $K_2$  равны и писать  $K_1 = K_2$ , если существует параллельный перенос плоскости, который позволяет совместить схемы  $K_1$  и  $K_2$ , иначе будем говорить, что  $K_1$  и  $K_2$  различны.

**Замечание.** Обычно, когда рассматривают плоские схемы, предполагается, что они имеют форму прямоугольника, и входы и выходы расположены по периметру. Но здесь мы не накладываем ограничения на геометрию схемы, поскольку схема, реализующая булеву функцию может быть частью большой схемы, реализующей булев оператор. А ограничения на геометрию есть лишь для всей схемы устройства, а не для ее составных частей.

#### Глубина плоских схем.

Чтобы определить глубину схемы, введём несколько вспомогательных понятий.

*Цепью* в плоской схеме будем называть последовательность клеточных элементов, в которой выход каждого элемента, кроме последнего, подключён ко входу следующего элемента.

Элемент цепи назовём *существенным*, если он является логическим или он является разветвлением провода, то есть хотя бы на двух его выходах реализуется тождественная функция от одного и того же входа.

*Весом* цепи будем называть количество существенных элементов этой цепи.

Цепь максимального веса будем называть *максимальной* цепью. Вес максимальной цепи схемы  $K$  будем называть *глубиной* и обозначать  $depth(K)$ .

### Мощность схем.

Для каждой схемы  $K$  зафиксируем некоторую нумерацию ее узлов. На  $i$ -м узле реализуется некоторая функция  $g_i$  от входных переменных схемы  $K$  (на входах считаем, что реализуются тождественные функции).

Везде далее будем считать, что схема  $K$  имеет  $n$  входов,  $l$  узлов и  $g_i$  — функция, реализуемая в  $i$ -м узле схемы  $K$ .

Состоянием схемы  $K$  на входном наборе  $x$  назовем вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если  $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$ , обозначим  $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$ .

Пусть схема  $K$  имеет  $n$  входов. Тогда

Потенциалом схемы  $K$  на входном наборе  $x \in \{0, 1\}^n$  назовем величину  $u_K(x) := |s_K(x)|$ .

Максимальным потенциалом схемы  $K$  на множестве входных наборов  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$  назовем  $\widehat{U}_{\mathcal{D}}(K) := \max_{x \in \mathcal{D}} u_K(x)$ .

Средним потенциалом схемы  $K$  на множестве входных наборов  $D \subseteq \{0, 1\}^n$  назовем  $U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x)$ . В случае

$D = \{0, 1\}^n$  будем обозначать просто  $U(K)$ , то есть  $U(K) := U_{\{0, 1\}^n}(K)$ .

Пусть  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  — частичный булев оператор. Тогда  $U(f) := \min_{K: F_K=f} U_D(K)$ .

Обозначим  $P_2(\mathcal{D}, m)$  — множество частичных булевых операторов  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  с  $m$  выходами, определенных на множестве  $\mathcal{D}$ .

Обозначим  $P_2(n, m) := P_2(\{0, 1\}^n, m)$  — множество всюду определенных булевых операторов с  $n$  входами и  $m$  выходами.

Также введем функцию Шеннона для булевых операторов.

$$U(\mathcal{D}, m) := \max_{f \in P_2(\mathcal{D}, m)} U(f); \quad U(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U(f);$$

**Замечание.** В работе [2] наряду со средним потенциалом были введены другие меры мощности, такие как максимальный потенциал, средняя мощность и максимальная мощность.

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

В [2, теорема 1] показана связь между этими мерами мощности, поэтому оценки, полученные в этой работе можно обобщить и на другие меры мощности.

## Результаты.

**Теорема 1.** *Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$ , причем  $n^2 = O(|\mathcal{D}|)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого частичного оператора  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  существует прямоугольная схема  $K$ , реализующая оператор  $f$  такая, что*

$$S(K) = O(m|\mathcal{D}|), \quad \text{depth}(K) = O\left(\log_2 |\mathcal{D}| + \frac{m}{\log_2 |\mathcal{D}|}\right),$$

$$\widehat{U}(K) = O\left(\max\left(n \log_2^2 n, \frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |\mathcal{D}|)}}\right)\right).$$

Здесь следует отметить, что, хотя схема  $K$  реализует частичный оператор  $f$ , берется максимальный потенциал по всем наборам, не только из области  $\mathcal{D}$ . Отсюда получаем 2 следствия.

**Следствие 1.** *Для любого оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$  существует схема  $K$ , реализующая оператор  $f$  такая, что*

$$S(K) = O(m|\mathcal{D}|), \quad \widehat{U}(K) = O\left(\frac{m2^{n/2}}{\sqrt{\min(m, n)}}\right).$$

**Следствие 2.** *Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$ , причем  $n^2 \log_2^4 n = O(|\mathcal{D}|)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого частичного оператора  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  существует его доопределение  $\bar{f}$  до всюду определенного оператора и схема  $K$ , реализующая  $\bar{f}$  такая, что*

$$S(K) = O(m|\mathcal{D}|), \quad \widehat{U}(K) = O\left(\frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |\mathcal{D}|)}}\right).$$

Учитывая нижние оценки из [3], получаем

**Следствие 3.** Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$ , причем  $m = 2^{o(|\mathcal{D}|)}$  и  $n^2 \log_2^4 n = O(|\mathcal{D}|)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\widehat{U}(\mathcal{D}, m) \asymp U(\mathcal{D}, m) \asymp \frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |\mathcal{D}|)}}.$$

Таким образом, в данной статье показано, что для почти всех частичных булевых операторов существуют прямоугольные схемы с оптимальной по порядку мощностью и площадью. Причём при  $m \leq \log_2^2 |\mathcal{D}|$  глубина схемы также будет оптимальна.

Если рассматривать не только прямоугольные схемы, то глубину можно сделать оптимальной по порядку для произвольного  $m$ .

**Теорема 2.** Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$ , причем  $n^2 \log_2^4 n = O(|\mathcal{D}|)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого частичного оператора  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  существует схема  $K$ , реализующая оператор  $f$  такая, что

$$S(K) = O(m|\mathcal{D}|), \quad \widehat{U}(K) = O\left(\frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |\mathcal{D}|)}}\right),$$

$$\text{depth}(K) = O(\log_2 m|\mathcal{D}|).$$

Остаётся убедиться, что полученные оценки площади и глубины являются оптимальными по порядку. Сформулируем этот факт в виде утверждения.

**Утверждение 1.** Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$ , причем  $n^2 \log_2^4 n = O(|\mathcal{D}|)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то площадь  $O(m|\mathcal{D}|)$  и глубина  $O(\log_2 m|\mathcal{D}|)$  оптимальны по порядку для почти всех частичных операторов  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$ .

## Доказательство

Хотя теоремы формулируются для базиса без ограничений, для наглядности мы будем использовать базис  $\{\vee, \&, \oplus, 1\}$ . Отрицание неудобно с точки зрения оценки потенциала схемы, поэтому его мы использовать не будем. Зато у многих блоков

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

будет вход  $z$ . На этот вход должна подаваться 1, если хотя бы один из остальных входов равен 1. Внутри блоков будем использовать только элементы, сохраняющие 0. Это гарантирует нам, что на нулевом входном векторе состояние блока будет нулевым, то есть потенциал на нулевом входном векторе равен 0. Далее будем пользоваться тем свойством, что если  $f(0, \dots, 0) = \bar{0}$ , то  $f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n)$  ( $\alpha \in \{0, 1\}$ ).

Будем говорить, что блок (подсхема)  $K'$  схемы  $K$  *неактивна* на входном наборе  $\vec{x}$ , если все входы  $K'$  равны 0 при подаче  $\vec{x}$  на входы схемы  $K$ . В противном случае будем говорить, что блок  $K'$  *активен* на входном наборе  $\vec{x}$ .

У каждого блока есть множество *допустимых входных наборов*, на которых он функционирует корректно. Именно на этом множестве мы будем оценивать его мощность. По умолчанию считаем, что

- если у блока есть вход, помеченный  $z$ , и остальные входы  $x_1, \dots, x_n$ , то корректными являются те и только те наборы, для которых  $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ;
- иначе все входные наборы являются корректными.

Введём длину и ширину схемы  $K$ .

*Длиной* схемы  $K$  называется длина наименьшего прямоугольника, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $l(K)$ .

*Шириной* схемы  $K$  называется ширина наименьшего прямоугольника, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $h(K)$ .

Для блоков, повёрнутых на 90 градусов, будем добавлять верхний индекс  $T$  к названию блока, чтобы явно подчеркнуть, что его длина равна ширине исходного блока и наоборот. Вообще говоря, ориентация блока обычно однозначно устанавливается исходя из расположения его входов и выходов. Поэтому отражённые и перевёрнутые блоки будем обозначать так же, как и исходный блок.

Введём также несколько обозначений.

- Если  $x$  – булева переменная,  $\alpha$  – булева величина, то  $x^\alpha := x \oplus \bar{\alpha}$ .
- Если  $x = (x_1, \dots, x_k)$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  – булевы вектора, то  $x^\alpha := \bigwedge_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$ .
- Если  $i$  – неотрицательное целое число,  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\bar{i}^{(k)}$  – булев вектор, составленный первых  $k$  цифр в двоичной записи числа  $i$ , начиная с младшего разряда. То есть  $i \equiv \bar{i}_1^{(k)} + 2\bar{i}_2^{(k)} + \dots + 2^{k-1}\bar{i}_k^{(k)} \pmod{2^k}$ .  $j$ -ю цифру числа  $i$  будем обозначать просто  $\bar{i}_j$  без верхнего индекса.
- Если  $x = (x_1, \dots, x_k)$  – булев вектор,  $i$  – неотрицательное целое число, то  $x^{\bar{i}} := x^{\bar{i}^{(k)}}$ .

Для подсчёта глубины схемы нам также понадобятся понятия глубины входа и выхода схемы.

*Глубиной входа* схемы  $K$  будем называть максимальный из весов всех цепей, начинающейся с данного входа.

*Глубиной выхода* схемы  $K$  будем называть максимальный из весов всех цепей, заканчивающихся данным выходом.

### Реализация всюду определённой булевой функции

В работе [2] была построена схема, реализующая булеву функцию с оптимальной по порядку площадью и мощностью. В данной работе мы хотим дополнительно получить и оптимальную по порядку глубину. Мы не можем использовать блоки, использованные в [2], поскольку они все имеют экспоненциальную глубину. Мы по-прежнему строим схему СДНФ функции, вся сложность заключается в построении дешифратора и разведении проводов таким образом, чтобы обеспечить одновременно оптимальную по порядку площадь, мощность и глубину.

### Дешифратор с линейной глубиной

**Лемма 1.** *Существует схема  $D'_n$  со входами  $z, x_1, \dots, x_n$ , имеющая  $2^n$  выходов, на  $i$ -м выходе которой на допустимых на-*

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

борах ( $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ) реализуется функция

$$zx_1^{\bar{i}_1} x_2^{\bar{i}_2} \dots x_n^{\bar{i}_n}.$$

Причем схема  $D'_n$  обладает следующими характеристиками

- 1)  $l(D'_n) = 2^n$ ,  $h(D'_n) \leq \frac{n(n+3)}{2}$ .
- 2)  $depth(D'_n) \leq 4n$ .

*Доказательство.* Схема строится по индукции на основе формулы

$$D'_n(z, \vec{x}) = (D'_{n-1}(z\bar{x}_n, z\bar{x}_n x_1, \dots, z\bar{x}_n x_{n-1}), D'_{n-1}(x_n, x_1 x_n, \dots, x_{n-1} x_n)). \quad (1)$$

Проверим формулу (1) на допустимых наборах.

- 1) Если входной набор  $(z, \vec{x})$  допустимый и  $z = 0$ , то  $\vec{x} = 0$ , и обе части (1) равны 0.
- 2) Если  $z = 1, x_n = 0$ , то равенство (1) имеет вид

$$D'_n(1, x_1, x_2, \dots, x_n) = (D'_{n-1}(1, x_1, \dots, x_{n-1}), D'_{n-1}(0, 0, \dots, 0)).$$

- а) Если  $i < 2^{n-1}$ , то  $\bar{i}_n = 0$ ,  $x_n^{\bar{i}_n} = 1$ , поэтому  $i$ -я компонента  $D'_n(z, \vec{x})$  равна  $x_1^{\bar{i}_1} \dots x_{n-1}^{\bar{i}_{n-1}}$ ;  $i$ -я компонента правой части равна  $i$ -й компоненте  $D'_{n-1}(1, x_1, \dots, x_{n-1})$  и также равна  $x_1^{\bar{i}_1} \dots x_{n-1}^{\bar{i}_{n-1}}$ .
- б) Если  $i \geq 2^{n-1}$ , то  $\bar{i}_n = 1$ ,  $x_n^{\bar{i}_n} = 0$ , поэтому  $i$ -я компонента  $D'_n(z, \vec{x})$  равна 0;  $i$ -я компонента правой части равна  $(i - 2^{n-1})$ -й компоненте  $D'_{n-1}(0, 0, \dots, 0)$  и равна 0.

- 3) Если  $z = 1, x_n = 1$ , то равенство (1) имеет вид

$$D'_n(1, \vec{x}) = (D'_{n-1}(0, 0, \dots, 0), D'_{n-1}(1, x_1, \dots, x_{n-1})).$$

- а) Если  $i < 2^{n-1}$ , то  $\bar{i}_n = 0$ ,  $x_n^{\bar{i}_n} = 0$ , поэтому  $i$ -я компонента  $D'_n(z, \vec{x})$  равна 0;  $i$ -я компонента правой части равна  $i$ -й компоненте  $D'_{n-1}(0, 0, \dots, 0)$  и равна 0.

- б) Если  $i \geq 2^{n-1}$ , то  $\bar{i}_n = 1$ ,  $x_n^{\bar{i}_n} = 0$ , поэтому  $i$ -я компонента  $D'_n(z, \vec{x})$  равна  $x_1^{\bar{i}_1} \dots x_{n-1}^{\bar{i}_{n-1}}$ ;  $i$ -я компонента правой части равна  $(i - 2^{n-1})$ -й компоненте  $D'_{n-1}(1, x_1, \dots, x_{n-1})$  и также равна  $x_1^{\bar{i}_1} \dots x_{n-1}^{\bar{i}_{n-1}}$ .

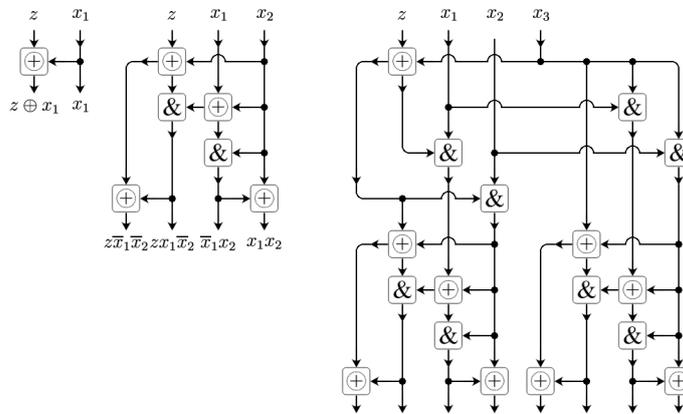


Рис. 2. Построение дешифратора  $D'_n$  – база индукции ( $n = 1, 2, 3$ ).

Приступим к построению схемы  $D'_n$ . Далее мы будем использовать, что на допустимых наборах, в частности, при  $z \geq x_n$ , верно равенство  $z\bar{x}_n = z \oplus x_n$

**База индукции.**

Для  $n = 1, 2, 3$  схемы изображены на рисунке 2. Для этих схем ограничения на длину, ширину и глубину проверяется непосредственно.

**Шаг индукции ( $n \geq 4$ ).**

Для построения схемы по формуле (1), нам понадобится вспомогательный блок  $DP_n$ , принимающий на вход  $z, x_1, \dots, x_n$  и вычисляющий  $z\bar{x}_1, z\bar{x}_1x_2, \dots, z\bar{x}_1x_2 \dots x_n, x_1x_2, \dots, x_1x_n$ . Этот блок изображён на рисунке 3. На рисунке 4 изображено построение блока



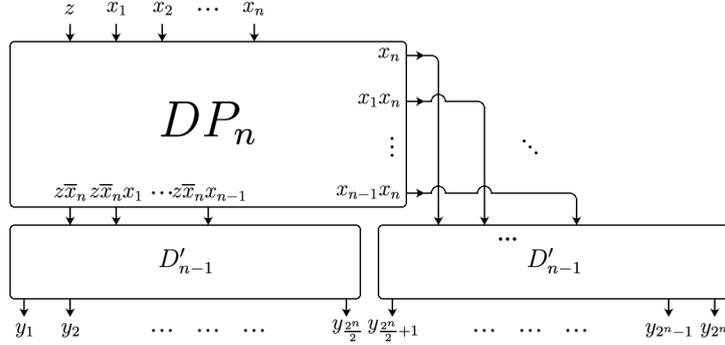


Рис. 4. Индуктивное построение дешифратора  $D_n$ .

где  $d^n(a, b_i)$  – максимальный вес цепи, соединяющей узлы  $a$  и  $b_i$ ,  $d^n(a)$  – глубина входа  $a$  схемы  $D'_n$ ,  $d^{n-1}(b_i)$  – глубина входа  $b_i$  схемы  $D'_{n-1}$ .

Вход  $z$  схемы  $DP'_n$  подключён непосредственно к элементу  $\oplus$ , к которому также идёт провод от входа  $x_n$ . Поэтому  $d_z(n) = d^n(z) \leq d^n(x_n) = d_n(n)$ . От входа  $x_n$  существуют цепи ко всем выходам  $DP_n$ , соответственно, ко всем входам обоих блоков  $D'_{n-1}$ . Цепи, ведущие от входа  $x_n$  к выходам  $z\bar{x}_n$  и  $x_n$  блока  $DP_n$ , имеют вес не более 2. Цепи, ведущие от входа  $x_n$  к выходам  $z\bar{x}_n \bar{x}_i$  и  $x_i x_n$  блока  $DP_n$ , имеют вес не более  $3 + n - i$ . Поэтому

$$\begin{aligned} d_n(n) &= \max \left( d_z(n-1) + 2, \max_{i < n} (d_i(n-1) + 3 + n - i) \right) \leq \\ &\leq \max \left( 4(n-1) + 2, \max_{i < n} (2(n-1) + 2i + 3 + n - i) \right) = \\ &= \max \left( 4n - 2, \max_{i < n} (3n + i + 1) \right) = 4n. \end{aligned}$$

От входа  $x_i (i < n)$  схемы  $DP'_n$  имеются только цепи длины 2 к выходам  $z\bar{x}_n x_i$  и  $x_i x_n$ , которые подключены ко входам  $x_i$  схем  $D'_{n-1}$ . Отсюда

$$d_i(n) = 2 + d_i(n-1) \leq 2 + 2(n-1) + 2i = 2n + 2i.$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

Глубина схемы  $D'_n$  равна  $\max(d_z(n), d_1(n), \dots, d_n(n)) \leq 4n$ . Лемма доказана.  $\square$

Нам также понадобится вычислять оператор, обратный к  $D'_n$ .

**Лемма 2.** *Существует линейный оператор  $D_n'^{-1}$  с  $2^n$  входами и  $n + 1$  выходов такой, что  $D_n'^{-1}(D'_n(z, x_1, \dots, x_n)) = (z, x_1, \dots, x_n)$  при  $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ .*

*Доказательство.* Пусть  $y_\alpha = z \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$  – выход с номером  $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  оператора  $D'_n$ . Тогда при  $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$  имеем

$$\begin{aligned} z(\vec{y}) &= \bigoplus_{\alpha \in \{0,1\}^n} z \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = \bigoplus_{\alpha \in \{0,1\}^n} y_\alpha, \\ x_i(\vec{y}) &= zx_i = z \bigoplus_{\alpha \in \{0,1\}^{n-1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n} = \\ &= \bigoplus_{\alpha \in \{0,1\}^{n-1}} y_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} 1 \alpha_{i+1} \dots \alpha_n}. \end{aligned}$$

Таким образом, входы оператора  $D'_n$  можно выразить линейными функциями от выходов. Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 3.** *Линейный оператор  $L$ , сохраняющий 0, с  $n$  входами и  $m$  выходами можно реализовать схемой (которую также будем обозначать  $L$ ) такой, что*

$$1) \ l(L) = 2n - 1, \quad h(L) = m(\lceil \log_2 n \rceil + 1).$$

$$2) \ \text{depth}(L) \leq \lceil \log_2 n \rceil + m.$$

3) *Расстояние между соседними входами схемы равно 2.*

*Доказательство.* Сначала построим блок для линейной функции  $l(x_1, \dots, x_n)$  по индукции (в этом случае  $m = 1$ ).

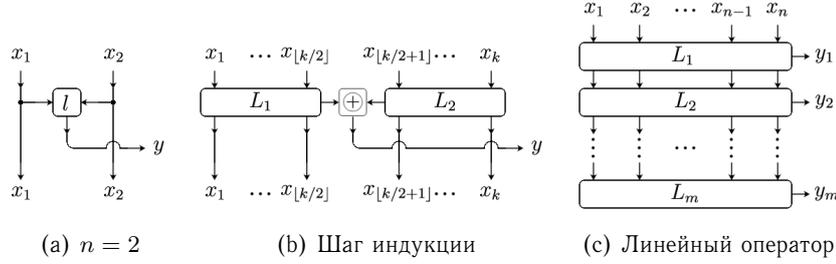


Рис. 5. Реализация линейного оператора.

**База индукции  $n = 2$ .**

Схема оператора изображена на рисунке 5(a). Элемент  $l$  реализует линейную функцию от 2-х переменных. Он может быть одним из четырёх:  $x_1 \oplus x_2$ ,  $x_1, x_2$ . Глубина выхода  $y$  не превышает 2, длина 3, высота 2, расстояние между входами равно 2. Таким образом, при  $n = 2$  условия леммы выполнены.

**Шаг индукции.**

Если  $L(x_1, \dots, x_k) = \bigoplus_{i=1}^k a_k x_k$ , то

$$L_1(x_1, \dots, x_{[k/2]}) = \bigoplus_{i=1}^{[k/2]} a_k x_k,$$

$$L_2(x_{[k/2]+1}, \dots, x_k) = \bigoplus_{i=[k/2]+1}^k a_k x_k,$$

$$L(x_1, \dots, x_k) = L_1(x_1, \dots, x_{[k/2]}) \oplus L_2(x_{[k/2]+1}, \dots, x_k).$$

По предположению индукции у нас есть схемы для  $L_1$  и  $L_2$ , и мы строим схему для  $L$ , как изображено на рисунке 5(b). Выход  $y$  может быть выведен как вправо (как на рисунке), так и влево, в зависимости от дальнейшего использования схемы. Посчитаем характеристики схемы  $L$ .

$$l(L) = l(L_1) + l(L_2) + 1 = 2 [k/2] - 1 + 2(k - [k/2]) -$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

$$\begin{aligned}
 & -1 + 1 = 2k - 1, \\
 & h(L) = \max(h(L_1), h(L_2)) + 1 = (\lceil \log_2 \lceil k/2 \rceil \rceil + 1) + 1 = \\
 & = \lceil \log_2 k \rceil + 1, \text{depth}(L) \leq \max(\text{depth}(L_1), \text{depth}(L, 2)) + 1 \leq \\
 & \leq (\lceil \log_2 \lceil k/2 \rceil \rceil + 1) + 1 = \lceil \log_2 k \rceil + 1.
 \end{aligned}$$

Отметим, что глубина нижних выходов схемы  $L$  равна 1.

**Случай**  $m > 1$ .

Если  $L = (L_1, \dots, L_m)$ , то схема для  $L$  строится, как показано на рисунке 5(с). Видно, что  $l(L) = l(L_i) = 2n - 1$ ,  $h(L) = h(L_1) + \dots + h(L_m) = m(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$ . Глубина выхода  $y_i$  блока  $L_i$  не превосходит  $\lceil \log_2 k \rceil + 1$ , но блоки соединены последовательно (вход  $x_i$  схемы  $L_j$  подключён к выходу  $x_i$  схемы  $L_{j-1}$ , который имеет глубину 1). Поэтому глубина выхода  $y_i$  будет равна  $(i - 1) + \lceil \log_2 k \rceil + 1 = i + \lceil \log_2 k \rceil$ . Таким образом, максимальную глубину имеет выход  $y_m$ , и глубина схемы  $L$  не превосходит  $m + \lceil \log_2 k \rceil$ . Лемма доказана.  $\square$

Из леммы 3 получаем

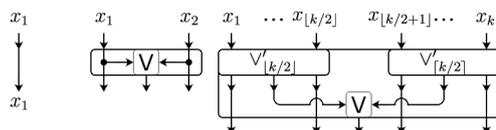
**Следствие 4.** Оператор  $D'_n{}^{-1}$  может быть реализован схемой (схему тоже будем обозначать  $D'_n{}^{-1}$ ) с параметрами

$$\begin{aligned}
 l(D'_n{}^{-1}) &= 2^{n+1} - 1, \\
 h(D'_n{}^{-1}) &= (n + 1)^2, \\
 \text{depth}(D'_n{}^{-1}) &\leq 2n + 1.
 \end{aligned}$$

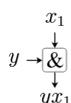
По аналогии с блоком, реализующим линейную функцию можно построить блок дизъюнкции  $\vee'_n$  (рисунок 6(a)) и блок  $\&x_n$  конъюнкции вектора длины  $2^n$  с переменной (рисунок 6(b)).

Схема  $\vee'_n$  имеет  $n$  входов  $x_1, \dots, x_n$  на верхней стороне, расстоянии между соседними входами равно 2. Напротив каждого входа  $\vee'_n$  на нижней стороне есть выход, на котором реализуется тождественная функция от этого входа. В середине нижней стороны есть ещё один выход, на котором как раз реализуется функция  $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ .

Г. В. Калачев



(а) Блок дизъюнкции  $\vee'_k$



(b) Блок  $\&_n$

Рис. 6.

Схема  $\&_n$  имеет  $2^n$  входов  $x_1, \dots, x_{2^n}$  на верхней стороне, расстоянии между соседними входами равно 2 и один вход  $y$  сбоку. Напротив каждого верхнего входа  $x_i$  на нижней стороне есть выход, на котором реализуется функция  $yx_i$ .

Подсчёт характеристик этих блоков аналогичен вычислениям в доказательстве леммы 3, поэтому подробно останавливаться на нём не будем. Приведём лишь окончательные оценки.

$$l(\vee'_n) = 2n - 1, \quad h(\vee'_n) = \lceil \log_2 n \rceil, \quad \text{depth}(\vee'_n) = \lceil \log_2 n \rceil,$$

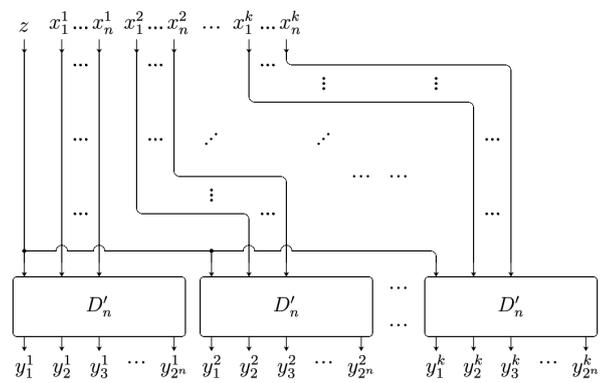
$$l(\&_n) = 2^{n+1} - 1, \quad h(\&_n) = n + 1, \quad \text{depth}(\&_n) = n + 1.$$

При этом на глубина всех выходов схемы  $\vee'_n$ , на которых реализуются тождественные функции, равна 1.

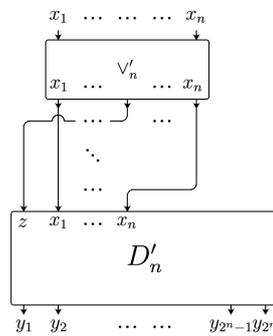
При построении многих схем нам понадобятся блоки дешифраторов и обратных к ним преобразований. Блок дешифраторов  $D'_{n,k}$  реализует оператор от  $(nk + 1)$ -й переменной

$$D'_{n,k}(z, x_1^1, \dots, x_n^1, x_1^2, \dots, x_n^2, \dots, x_1^k, \dots, x_n^k) =$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы



(а) Блок дешифраторов  $D'_{n,k}$ .



(б) Дешифратор  $D'_n$  без входа  $z$

Рис. 7. Блок дешифраторов.

$$= (D'_n(z, x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, D'_n(z, x_1^k, \dots, x_n^k)).$$

Блок реализуется очевидным образом (рисунок 7(a)). Отметим, что входы могут располагаться на верхней стороне блока  $D'_{n,k}$  в произвольном месте, а также на левой или правой стороне. Блок  $D'_{n,k}$  имеет следующие характеристики

$$\begin{aligned} l(D'_{n,k}) &= kl(D'_n) = k2^n, \\ h(D'_{n,k}) &\leq h(D'_n) + 1 + nk + 1 \leq \frac{n(n+3)}{2} + nk + 2, \\ \text{depth}(D'_{n,k}) &\leq k + \text{depth}(D'_n) \leq k + 4n. \end{aligned}$$

Также нам понадобится дешифратор без дополнительного входа  $z$ . Чтобы его построить, мы ко входу  $z$  дешифратора  $D'_n$  подключим дизъюнкцию всех остальных входов, как показано на рисунке 7(b). Любой набор вида  $(x_1 \vee \dots \vee x_n, x_1, \dots, x_n)$  является допустимым для блока  $D'_n$ , поэтому схема  $D_n$  построена корректно. Блок  $D_n$  имеет следующие характеристики.

$$\begin{aligned} l(D_n) &= l(D'_n) = 2^n, \\ h(D_n) &\leq h(D'_n) + n + h(\vee_n) \leq \frac{n(n+3)}{2} + n + \log_2 n = O(n^2), \\ \text{depth}(D_n) &\leq \text{depth}(D'_n) + \text{depth}(\vee_n) \leq 4n + O(\log_2 n) = O(n). \end{aligned}$$

$D_n(x_1, \dots, x_n) = D'_n(x_1 \vee \dots \vee x_n, x_1, \dots, x_n)$ , поэтому вычислять левый обратный оператор к  $D_n$  можно так же, как и левый обратный к  $D'_n$ , кроме переменной  $z$ . То есть существует линейный оператор  $D_n^{-1}$  такой, что  $D_n^{-1}(D_n(\vec{x})) = \vec{x}$ . Его можно реализовать схемой с такими же параметрами, как и  $D_n^{-1}$ .

Для всех описанных выше схем мы не считали потенциал, поскольку в этих случаях для нас достаточно, что потенциал по порядку не превосходит площади схемы.

Теперь мы готовы приступить к построению схемы, реализующей булеву функцию. Для этого нам понадобится блок, аналогичный блоку  $DP_n$ , использованному при построении дешифратора, но с другим расположением выходов. Этот блок изображён на рисунке 8, будем обозначать его  $SP_n$ . Как схема из функциональных элементов этот блок идентичен блоку  $DP_n$ , отлича-

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

есть только расположение проводов. Блок  $SP_n$  имеет размеры  $l(SP_n) = 2n + 1$ ,  $h(SP_n) = n + 1$ .

**Лемма 4.** При  $n \geq 3$  для любой функции  $f$  от  $n$  переменных существует схема  $H_f$  с  $n + 1$  входом и одним выходом, реализующая функцию  $f'(z, x_1, \dots, x_n) = zf(x_1, \dots, x_n)$  на таких наборах, что  $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ , с параметрами

- 1)  $l(H_f) \leq 8 \cdot 2^{n/2}$ ,
- 2)  $h(H_f) \leq 8 \cdot 2^{(n-1)/2}$ ,
- 3)  $depth(H_f) \leq 5n + 5$ ,
- 4)  $\widehat{U}(H_f) = 90n2^{n/2}$ .

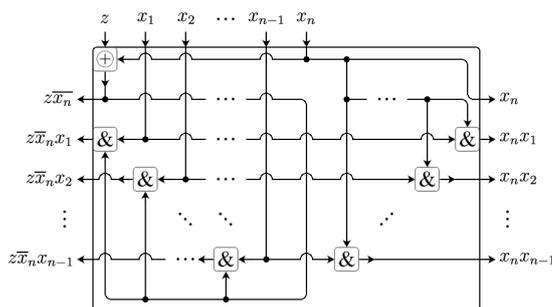


Рис. 8. Разветвляющий блок  $SP_n$ .

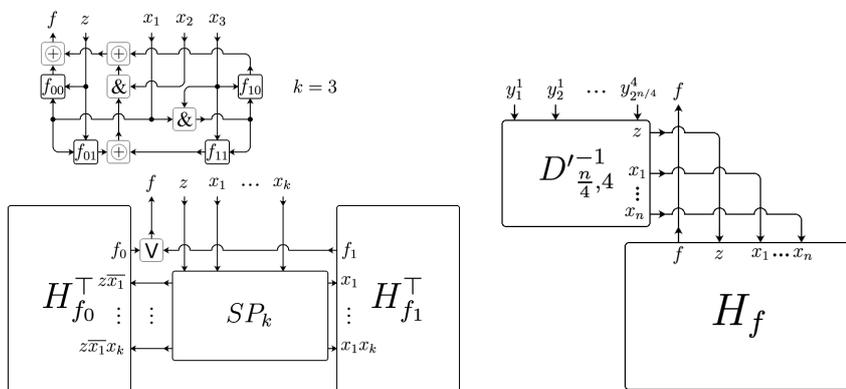
*Доказательство.* Обозначим  $h_n$  – верхняя оценка для  $h(H_f)$ ,  $l_n$  – верхняя оценка для  $l(H_f)$ , если  $f$  зависит от  $n$  аргументов. Доказательство будем вести по индукции. Для длины и ширины будем доказывать неравенства

$$l(H_f) \leq 8 \cdot 2^{n/2} - 2n - 8, h(H_f) \leq 8 \cdot 2^{(n-1)/2} - 2(n-1) - 8. \quad (2)$$

**База индукции  $k = 3$ .**

Для  $k = 3$  схема приведена на рисунке 9(а) сверху. Функция реализуется по формуле

$$f'(z, x_1, x_2, x_3) = f_{00}(z, x_1) \oplus f_{10}(x_3, x_1 x_3) \oplus x_2(f_{01}(z, x_1) \oplus$$



(а) База индукции – схема  $H_f^{(3)}$  (сверху) и (б) Блок  $H'_f$ , подключаемый к блоку построения блока  $H_f$  (снизу).

Рис. 9. Реализация функции  $f$  схемой с потенциалом  $O(n2^{n/2})$  – блоки  $H_f$  и  $H'_f$ .

$$\oplus f_{11}(x_3, x_1x_3),$$

где  $f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}$  – линейные функции, сохраняющие 0 ( $0, x_1, x_2$  или  $x_1 \oplus x_2$ ), которые можно подобрать, выписав полином Жегалкина функции  $f$ . Из рисунка мы можем видеть, что

$$h(H_f^{(3)}) = 4, \quad l(H_f^{(3)}) = 7, \quad depth(H_f^{(3)}) \leq 8, \quad \widehat{U}(H_f^{(3)}) \leq 38,$$

Таким образом при  $n = 3$  условие леммы верно.

### Шаг индукции.

Схему  $H_k$  мы строим на основе формулы

$$f'(z, x_1, \dots, x_n) = f'_0(z\bar{x}_n, z\bar{x}_nx_1, \dots, z\bar{x}_nx_{n-1}) \vee f'_1(x_n, x_1x_n, \dots, x_{n-1}x_n)$$

$$\text{при } z \geq \bigvee_{i=1}^n x_i \tag{3}$$

где  $f'_\alpha(z, x_1, \dots, x_{n-1}) = f'(z, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \alpha) = zf(x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha)$ . Проверим уравнение (3) на допустимых наборах. При  $z = 0$  все

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

$x_i = 0$ , поэтому обе части ( ) равны 0. При  $z = 1$  в правой части ( ) имеем

$$\begin{aligned} & f'_0(\bar{x}_n, \bar{x}_n x_1, \dots, \bar{x}_n x_{n-1}) \vee f'_1(x_n, x_1 x_n, \dots, x_{n-1} x_n) = \\ & = \bar{x}_n f(\bar{x}_n x_1, \dots, \bar{x}_n x_{n-1}, 0) \vee x_n f(x_1 x_n, \dots, x_{n-1} x_n, 1) = \\ & = \bar{x}_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee x_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Левая часть ( ) равна  $z f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$  и равна (4).

Итак, формула ( ) верна на допустимых наборах, и мы можем на её основе построить схему  $H_f$  с использованием блоков  $H_{f_0}$  и  $H_{f_1}$  (рисунок 9(а), нижняя схема). Блоки  $H_{f_0}$  и  $H_{f_1}$  реализуют функции  $f'_0$  и  $f'_1$  соответственно. Эти блоки перевёрнуты на бок так, чтобы входы располагались в порядке  $z, x_1, \dots, x_{n-1}$  сверху вниз. Оценим размер блока  $H_f$ .

$$\begin{aligned} h(H_f) &= \max(h(H_{f_0}^\top), h(H_{f_1}^\top)) = \max(l(H_{f_0}), l(H_{f_1})) \leq \\ &\leq 8 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2(n-1) - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(H_f) &= l(H_{f_0}^\top) + l(H_{f_1}^\top) + l(SP_n) + 1 = h(H_{f_0}) + h(H_{f_1}) + 2n \leq \\ &\leq 2(8 \cdot 2^{\frac{n-2}{2}} - 2(n-2) - 8) + 2n = 8 \cdot 2^{n/2} - 2n - 8. \end{aligned}$$

Для оценки глубины схемы заметим, что блоки  $SP_k$  в схеме  $H_n$  подключены точно так же, как и блоки  $DP_k$  в схеме  $D'_n$ . Таким образом, глубина подсхемы схемы  $H_f$ , составленной из блоков  $DP_k$  ( $k \geq 3$ ), такая же, как и в схеме  $D'_n$ , то есть не превосходит  $4n$ . Выходы каждого блока  $DP_3$  подключены к схеме  $H_g^{(3)}$ , где  $g$  – некоторая функция от трёх переменных. Таким образом, максимальный вес цепи от входов  $H_f$  до выходов блоков  $H_g^{(3)}$  не более  $4n + \text{depth}(H_g^{(3)}) \leq 4n + 8$ . Чтобы посчитать длину цепи от выходов  $H_g^{(3)}$  до выхода всей схемы  $H_f$ , заметим, что на каждом шаге индукции мы подключаем выходы блоков  $H_{f_0}$  и  $H_{f_1}$  к дизъюнкции, выход которой является выходом схемы  $H_f$ . За счёт этого вес цепи на каждом шаге увеличивается на 1. Поскольку всего  $n-3$  шага,  $\text{depth}(H_f) \leq 4n + 8 + (n-3) = 5n + 5$ .

Осталось оценить потенциал схемы. На входном наборе  $(z, x_1, \dots, x_n)$  лишь один из блоков  $H_{f_0}$  и  $H_{f_1}$  может быть активным в зависимости от значения  $x_1$ . Если  $x_1 = 0$ , то на все входы блока  $H_{f_1}$  подаётся 0, то есть блок  $H_{f_1}$  не активен. Аналогично, если  $x_1 = 1$ , то блок  $H_{f_0}$  не активен. Суммарный потенциал части схемы, занятой проводами и блоком  $SP_n$ , можно оценить через площадь, которая не превосходит  $(2n + 2)h(H_f)$ . Каждый элемент в этой части схемы имеет не более 2-х выходов, поэтому потенциал не более, чем в 2 раза превосходит площадь.

$$\begin{aligned} \widehat{U}(H_f) &\leq \max(\widehat{U}(H_{f_0}), \widehat{U}(H_{f_1})) + 2(2n + 2) \cdot 8 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \leq \\ &\leq 80(n - 1)2^{\frac{n-1}{2}} + 32(n + 1)2^{\frac{n-1}{2}} = (112n - 48)2^{\frac{n-1}{2}} < \frac{112n}{\sqrt{2}}2^{\frac{n}{2}} < \\ &< 80n2^{\frac{n}{2}}. \quad (5) \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

Мы видим, что потенциал схемы по порядку в  $n$  раз больше, чем мы хотим получить. Поэтому нам потребуется надстройка над схемой  $H_f$ . В первую очередь построим схему  $H'_f$ , предполагая, что число аргументов функции  $f$  кратно 4. Подключим блок  $D'_{n/4,4}{}^{-1}$  ко входу блока  $H_f$ , как показано на рисунке 9(b). Поскольку блок

$$\begin{aligned} h(D'_{n/4,4}{}^{-1}) &= \left(\frac{n}{4} + 1\right)(n + 1) = o(2^{n/2}), \quad l(D'_{n/4,4}{}^{-1}) = 8 \cdot 2^{n/4} - 1 = \\ &= o(2^{n/2}), \end{aligned}$$

то  $h(H'_f) \lesssim 9 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$ ,  $l(H'_f) \lesssim 9 \cdot 2^{n/2}$ . Можно также оценить глубину и потенциал

$$\text{depth}(H'_f) \leq \text{depth}(H_f) + \text{depth}(D'_{n/4,4}{}^{-1}) \leq 5n + 5 + 4 + \frac{n}{4} = \frac{21}{4}n + 9.$$

$$\begin{aligned} \widehat{U}(H'_f) &\leq \widehat{U}(H_f) + \widehat{U}(D'_{n/4,4}{}^{-1}) + (n + 2)h(D'_{n/4,4}{}^{-1}) = \\ &= 90n2^{\frac{n}{2}} + O(S(D'_{n/4,4}{}^{-1})) + O(n^3) \sim 90n2^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Докажем вспомогательную лемму.

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

**Лемма 5.** *Если  $k \geq 2$ , то*

$$\max(\lceil \log_2 \lfloor k/2 \rfloor \rceil, \lceil \log_2(k - \lfloor k/2 \rfloor) \rceil) = \lceil \log_2 k \rceil - 1.$$

*Доказательство.* Обозначим  $k' := \lfloor k/2 \rfloor$ ,  
 $m := \max(\lceil \log_2 k' \rceil, \lceil \log_2(k - k') \rceil)$ . Тогда  $k - k' \geq k'$ .

Если  $k$  – чётное, то  $k' = k - k' = k/2$ , поэтому  $m = \lceil \log_2 k/2 \rceil = \lceil \log_2 k - 1 \rceil = \lceil \log_2 k \rceil - 1$ .

Если  $k$  – нечётное, то  $k - k' = k' + 1 = \frac{k+1}{2}$ ,  $\lceil \log_2 k \rceil = \lceil \log_2(k+1) \rceil$ , поэтому  $m = \lceil \log_2 \frac{k+1}{2} \rceil = \lceil \log_2(k+1) - 1 \rceil = \lceil \log_2(k+1) \rceil - 1 = \lceil \log_2 k \rceil - 1$ .

То есть в любом случае  $m = \lceil \log_2 k \rceil - 1$ . Лемма доказана.  $\square$

Ещё для построения финальной схемы нам потребуется разветвитель пучка проводов, имеющий логарифмическую глубину.

**Лемма 6.** *При  $n \geq 1, d \geq 1, d' \geq 0, k \geq 1$  существует схема  $T_k^{n,d,d'}$  с  $n$  входами и  $k$  группами выходов  $y_1^j, \dots, y_n^j$ , причём внутри каждой группы соседние выходы расположены на расстоянии  $d$  друг от друга, а между соседними группами выходов расстояние  $d'$ . На всех выходах реализуются тождественные функции  $y_i^j = x_i$ . При этом схема  $T_k^{n,d,d'}$  обладает следующими характеристиками.*

- 1)  $l(T_k^{n,d,d'}) = k((n-1)d + 1) + (k-1)d'$ ;
- 2)  $h(T_k^{n,d,d'}) = n \lceil \log_2 k \rceil$ ;
- 3)  $\text{depth}(T_k^{n,d,d'}) = \lceil \log_2 k \rceil$ ;
- 4)  $u_{T_k^{n,d,d'}}(\vec{x}) \leq |\vec{x}|(k(nd + d')(\lceil \log_2 k \rceil + 1))$ .

*Доказательство.* Схему будем строить по индукции.

**База индукции ( $k = 1$ ).**

Схема  $T_1^{n,d,d'}$  изображена на рисунке 10(а).

$$l(T_1^{n,d,d'}) = n + (d-1)(n-1) = (n-1)d + 1, \quad h(T_1^{n,d,d'}) = n,$$

Г. В. Калачев

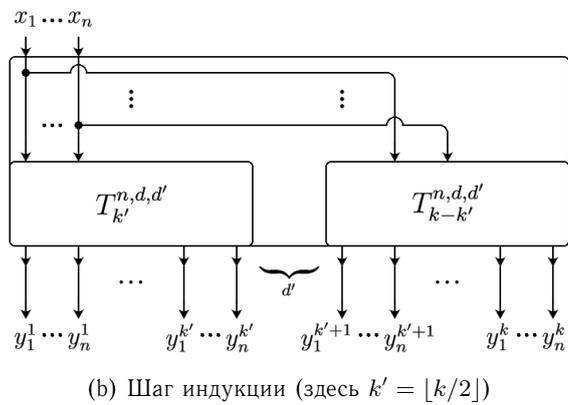
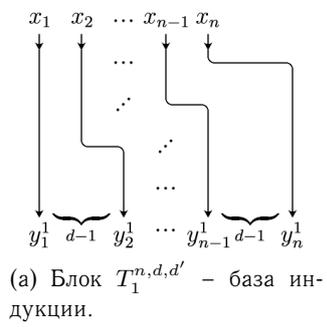


Рис. 10. Разветвитель пучка проводов с логарифмической глубиной – блок  $T_k^{n,d,d'}$ .

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

$$\text{depth}(T_1^{n,d,d'}) = 0.$$

Чтобы оценить потенциал на входном векторе  $x$ , заметим, что длина каждого провода не превосходит  $l(T_1^{n,d,d'}) - n + h(T_1^{n,d,d'}) = (n-1)d + 1 - n + n = (n-1)d + 1 \leq nd$ . Таким образом, если на входы подан вектор  $\vec{x}$ , то  $|x|$  входных переменных равны 1, и потенциал не превосходит  $|x|nd$ . Таким образом, утверждение для  $k = 1$  верно.

### Шаг индукции.

Схема  $T_k^{n,d,d'}$  строится с использованием схем  $T_{k'}^{n,d,d'}$  и  $T_{k-k'}^{n,d,d'}$  ( $k' = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ ), как показано на рисунке 10(b). Оценим параметры этой схемы.

$$\begin{aligned} l(T_k^{n,d,d'}) &= l(T_{k'}^{n,d,d'}) + l(T_{k-k'}^{n,d,d'}) + d' = k'((n-1)d+1) + (k'-1)d' + \\ &+ (k-k')((n-1)d+1) + (k-k'-1)d' + d' = k((n-1)d+1) + (k-1)d'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(T_k^{n,d,d'}) &= n + \max(h(T_{k'}^{n,d,d'}), h(T_{k-k'}^{n,d,d'})) = \\ &= n + \max(n \lceil \log_2 k' \rceil, n \lceil \log_2(k-k') \rceil) = \\ &= n + n (\lceil \log_2 \lceil k/2 \rceil \rceil) = n \lceil \log_2 k \rceil. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{depth}(T_k^{n,d,d'}) &= 1 + \max(\text{depth}(T_{k'}^{n,d,d'}), \text{depth}(T_{k-k'}^{n,d,d'})) = \\ &= 1 + \max(\lceil \log_2 k' \rceil, \lceil \log_2(k-k') \rceil) = \lceil \log_2 k \rceil. \end{aligned}$$

При подсчёте  $h$  и  $\text{depth}$  мы воспользовались леммой 5.

Потенциал на векторе  $\vec{x}$  складывается из потенциалов блоков на том же векторе и потенциала проводов. От каждого выхода идёт провод к обоим блокам. Длина провода до первого блока  $T_{k'}^{n,d,d'}$  равна  $n$ , длина провода до блока  $T_{k-k'}^{n,d,d'}$  складывается из длины блока  $T_{k'}^{n,d,d'}$  и вертикального участка длины не более  $n$ .

Итак,

$$\begin{aligned}
 u_{T_k^{n,d,d'}}(\vec{x}) &= |\vec{x}|(l(T_{k'}^{n,d,d'}) + 1 + 2n) + u_{T_{k'}^{n,d,d'}}(\vec{x}) + u_{T_{k-k'}^{n,d,d'}}(\vec{x}) = \\
 &= |\vec{x}|(k'((n-1)d+1)+(k'-1)d'+1+2n)+|\vec{x}|k'(nd+d')(\lceil \log_2 k' \rceil +1)+ \\
 &+ |\vec{x}|(k-k')(nd+d')(\lceil \log_2(k-k') \rceil +1) \leq |\vec{x}|(k'(nd+d') + 1 + 2n + \\
 &\quad + k(nd+d')(\max(\lceil \log_2 k' \rceil, \lceil \log_2(k-k') \rceil) + 1)) \leq \\
 &\leq |\vec{x}|(nd+d')(k' + \frac{2}{d} + k \lceil \log_2 k \rceil) \leq |\vec{x}|(nd+d')k(\lceil \log_2 k \rceil + 1).
 \end{aligned}$$

В последнем преобразовании мы использовали, что  $k' + 2/d \leq \lfloor k/2 \rfloor + 2 \leq k$  при  $k \geq 3$ . Лемма доказана.  $\square$

По умолчанию будем считать, что  $d' = 0$ , то есть  $T_k^{n,d}$  будет обозначать схему  $T_k^{n,d,0}$ .

**Лемма 7.** Любую функцию  $f$  от  $n$  можно реализовать схемой  $S_f$ , с параметрами

- 1)  $l(S_f) \lesssim 9 \cdot 2^{n/2}$ ,  $h(S_f) \lesssim 12 \cdot 2^{n/2}$ ;
- 2)  $\text{depth}(S_f) \lesssim 9n$ ;
- 3)  $\widehat{U}(S_f) = O(2^{n/2})$ .

Асимптотические неравенства верны при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.*

**Построение разветвляющего блока.**

Пусть числа  $n$  и  $k$  таковы, что  $n - 2k$  кратно 4. Положим  $s := \frac{n-2k}{4}$ . Рассмотрим блок  $SH_n^k$ , изображённый на рисунке 11. Этот блок имеет  $n + 1$  вход  $z, x_1, \dots, x_n$  и  $4^k$  групп по  $4 \cdot 2^s$  выходов. На выходах  $i$ -й группы реализуется оператор  $y_i D'_{s,4}(z, x_1, \dots, x_{n-2k})$ , где  $(y_1, \dots, y_4) = D'_{2l}(z, x_{n-2k+1}, \dots, x_n)$ . То есть  $y_i = z x_{n-2k+1}^{\bar{i}_1} x_{n-2k+2}^{\bar{i}_2} \dots x_n^{\bar{i}_{2k}} = z(x_{n-2k+1}, \dots, x_n)^{\bar{i}}$ . Для длины и высоты схемы  $SH_n^k$  нам достаточно грубых оценок.

$$l(SH_n^k) = l(T_{4^k}^{4 \cdot 2^{\frac{n-2k}{4}}, 2}) + l(D'_{2k}) = O(4^k 2^{\frac{n-2k}{4}}) + O(2^{2k}) = O(2^{n/4+2k}).$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

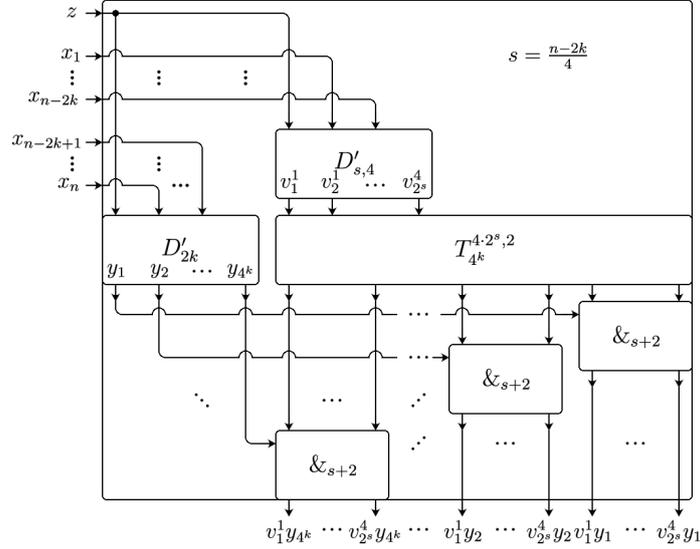


Рис. 11. Верхний разветвитель входов – блок  $SH_n^k$

$$\begin{aligned}
 h(SH_n^k) &\leq n - 2k + 1 + \max \left( h(T_{4^k}^{4 \cdot 2^s, 2}) + h(D'_{s,4}), 2k + h(D'_{2k}) \right) + \\
 &+ 4^k + h(\&_{s+2}) = O(n) + O(\max(k2^s + s^2, k^2)) + O(4^k + s) = \\
 &= O(k2^s + 4^k) = O(2^{n/4} + 4^k).
 \end{aligned}$$

Глубину оценим чуть более аккуратно.

$$\begin{aligned}
 \text{depth}(SH_n^k) &\leq \text{depth}(\&_{s+2}) + \\
 &+ \max \left( \text{depth}(D'_{2k}), \text{depth}(T_{4^k}^{4 \cdot 2^s, 2}) + \text{depth}(D'_{s,4}) \right) + 1 \leq \\
 &\leq (s+3) + \max(8k, 2k + (4+4s)) + 1 \leq 5s + 8 + 8k \leq \frac{5}{4}n + 8 + 8k.
 \end{aligned}$$

Для оценки потенциала оценим суммарную длину проводов, соединяющих все блоки.

- 1) Каждый из проводов, идущих от входов  $x_1, \dots, x_n$ , имеет длину не более  $l(SH_n^k) + h(SH_n^k) = O(2^{n/4+2k})$ , поэтому их суммарная длина составляет  $O(n2^{n/4+2k})$ .

- 2) От входа  $z$  провод сразу разветвляется на 2, каждый из проводов также имеет длину  $O(2^{n/4+2k})$ .
- 3) Каждый из проводов, исходящих из  $D'_{2k}$  имеет длину не более  $4^k + l(T_{4^k}^{4 \cdot 2^s, 2}) = O(2^{n/4+2k})$ . Их суммарная длина не превосходит  $O(4^k 2^{n/4+2k}) = O(2^{n/4+4k})$ .
- 4) Суммарная длина всех вертикальных проводов, расположенных под схемой  $T_{4^k}^{4 \cdot 2^s, 2}$ , не превосходит количества занимаемых ими ячеек, то есть  $(4^k + h(\&_{s+2}) - 1)l(T_{4^k}^{4 \cdot 2^s, 2}) = O(2^{n/4+4k})$ .

Суммарная длина всех проводов составляет  $O(2^{n/4+4k})$ .

Потенциал схемы складывается из потенциала проводов и потенциала блоков. Заметим, что при любом входном наборе на выходах блока дешифраторов  $D'_{s,4}$  не более 4-х единиц, то есть  $|(v_1^1, \dots, v_{2^s}^4)| \leq 4$ . Тогда по лемме 6 потенциал блока  $T_{4^k}^{4 \cdot 2^s, 2}$  не превосходит  $4(4^k \cdot 4 \cdot 2^s \cdot 2(2k+1)) = O(k2^{\frac{n-2k}{4}+2k}) = O(2^{n/4+2k})$ . Для остальных блоков достаточно использовать оценку потенциала через площадь.

$$\begin{aligned} \widehat{U}(SH_n^k) &\leq O(2^{n/4+4k}) + O(2^{n/4+2k}) + 4S(D'_{s,4}) + 4S(D'_{2k}) + \\ &+ 4^k \cdot 4S(\&_{s+2}) = O(2^{n/4+4k}) + O(s^2 2^s) + O(k^2 2^{2k}) + O(4^k 2^s) = \\ &= O(s^2 2^s + 2^{n/4+4k}) = O(n^2 2^{n/4} + 2^{n/4+4k}). \end{aligned}$$

### Построение схемы, реализующей саму функцию.

Сначала будем считать, что  $n$  чётно. Тогда можно подобрать  $k$  такое, что  $n - 2k$  кратно 4 (конкретное значение  $k$  укажем позднее). Определим функции  $f_j^i$  для  $i, j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ .

$$f_i^j(x_1, \dots, x_{n-2k}) := f(x_1, \dots, x_{n-2k}, \bar{j}_1, \bar{j}_2, \dots, \bar{j}_k, \bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_k),$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

Разложим функцию  $f$  по  $2k$  последним переменным.

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= \\
&= \bigvee_{\alpha, \beta \in \{0,1\}^k} x_{n-2k+1}^{\beta_1}, \dots, x_{n-k}^{\beta_k} x_{n-k+1}^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_k} \\
f(x_1, \dots, x_{n-2k}, \beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k) &= \\
&= \bigvee_{i=0}^{2^k} \bigvee_{j=0}^{2^k} x_{n-2k+1}^{\bar{j}_1}, \dots, x_{n-k}^{\bar{j}_k} x_{n-k+1}^{\bar{i}_1}, \dots, x_n^{\bar{i}_k} \\
f(x_1, \dots, x_{n-2k}, \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_k, \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k) &= \\
&= \bigvee_{i=0}^{2^k} \bigvee_{j=0}^{2^k} (x_{n-2k+1}, \dots, x_{n-k})^{\bar{j}} (x_{n-k+1}, \dots, x_n)^{\bar{i}} f_i^j(x_1, \dots, x_{n-2k})
\end{aligned}$$

Для каждой функции  $f_i^j$  строим схему  $H'_{f_i^j}$  и подсоединяем входы к  $(2^k i + j)$ -й группе выходов схемы  $SH_n^k$ , как показано на рисунке 12. Тогда на выходах блока  $H'_{f_i^j}$  будет реализовываться функция  $f_i^{j'}(D'_{s,4}^{-1}(W_i^j))$ , где вектор  $W_i^j$  –  $(2^k i + j)$ -я группа выходов блока  $SH_n^k$ , то есть  $W_i^j = z(x_{n-2k+1}, \dots, x_n)^{2^k i + j} D'_{s,4}(z, x_1, \dots, x_{n-2k}) = z(x_{n-2k+1}, \dots, x_{n-k})^{\bar{j}} (x_{n-k+1}, \dots, x_n)^{\bar{i}} D'_{s,4}(x_1, \dots, x_{n-2k})$ . Тогда при  $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$  на выходе  $H'_{f_i^j}$  будет реализовываться функция

$$\begin{aligned}
f_i^{j'}(D'_{s,4}^{-1}(y_{2^k i + j} D'_{s,4}(z, x_1, \dots, x_{n-2k}))) &= \\
&= f_i^{j'}(y_{2^k i + j} D'_{s,4}^{-1}(D'_{s,4}(z, x_1, \dots, x_{n-2k}))) = \\
&= y_{2^k i + j} f_i^{j'}(z, x_1, \dots, x_{n-2k}) = z(x_{n-2k+1}, \dots, x_{n-k})^{\bar{j}} (x_{n-k+1}, \dots, x_n)^{\bar{i}} \\
&\quad f_i^j(x_1, \dots, x_{n-2k}).
\end{aligned}$$

На выходе всей схемы  $S'_f$  реализуется дизъюнкция выходов всех схем  $H'_{f_i^j}$

$$\bigvee_{i=0}^{2^k} \bigvee_{j=0}^{2^k} z(x_{n-2k+1}, \dots, x_{n-k})^{\bar{j}} (x_{n-k+1}, \dots, x_n)^{\bar{i}} f_i^j(x_1, \dots, x_{n-2k}) =$$

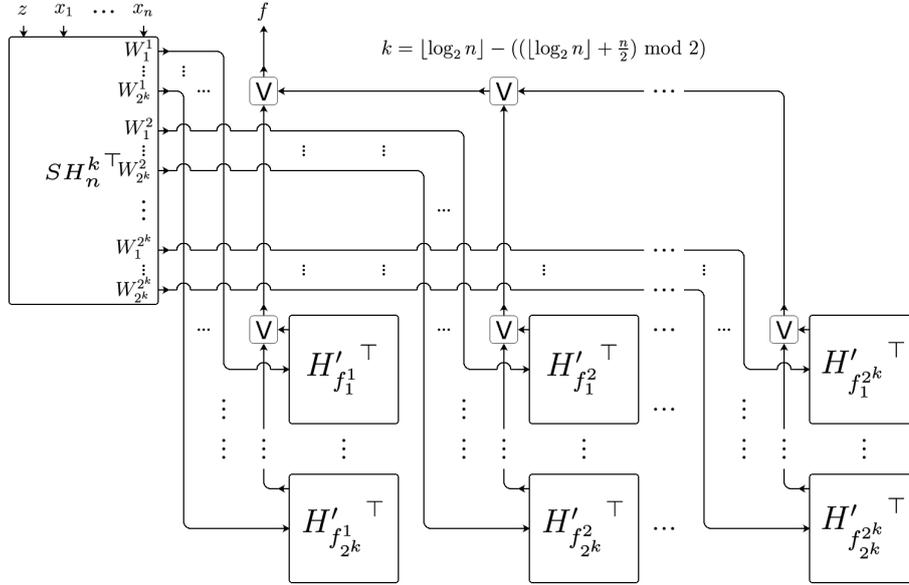


Рис. 12. Реализация функции  $f$  – блок  $S'_f$ . Здесь  $W_i^j$  обозначает  $(2^k i + j)$ -ю группу выходов блока  $SH_n^k$ , а провод, идущий из  $W_i^j$ , обозначает группу параллельных проводов.

$$= z f(x_1, \dots, x_n).$$

Подключая элемент 1 ко входу  $z$ , получаем схему  $S_f$ , реализующую функцию  $f$ .

Теперь оценим параметры схемы  $S'_f$ . Длина схемы  $S'_f$  складывается из длины блока  $SH_n^k$ , длин  $2^k$  блоков  $H'_{f_i^j}$ , всех  $4^k$  групп проводов  $W_i^j$  (всего  $4^k \cdot 4 \cdot 2^s = O(2^{s+2k}) = O(2^{n/4+2k})$  проводов) и проводов соединяющих выходы блоков  $H'_{f_i^j}$  (всего  $2^k$  проводов).

$$\begin{aligned} l(S_f) &= l(SH_n^k) + 2^k l(H'_{f_1^1}) + O(2^{n/4+2k}) + O(2^k) = \\ &= h(SH_n^k) + 2^k h(H'_{f_1^1}) + O(2^{n/4+2k}) \leq O(2^{n/4+2k}) + 2^k \cdot 8 \cdot 2^{\frac{n-2k-1}{2}} = \\ &= 8 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} + O(2^{n/4+2k}). \end{aligned}$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

Высота схемы  $S'_f$  складывается из высоты блока  $SH_n^{k\top}$  и высот  $2^k$  блоков  $H'_{f_i^j\top}$  (блоки расположены вплотную друг к другу).

$$\begin{aligned} h(S_f) &= h(SH_n^{k\top}) + 2^k h(H'_{f_1^j\top}) = l(SH_n^k) + 2^k l(H'_{f_1^j}) \leq \\ &\leq O(2^{n/4+2k}) + 2^k \cdot 8 \cdot 2^{\frac{n-2k}{2}} = 8 \cdot 2^{n/2} + O(2^{n/4+2k}). \end{aligned}$$

Вес любой цепи от входа  $S'_f$  к выходу, проходящей через блок  $H'_{f_i^j\top}$  складывается из глубины блока  $SH_n^k$ , глубины блока  $H'_{f_i^j\top}$  и количества дизъюнкций на пути от выхода блока  $H'_{f_i^j\top}$  до выхода схемы и не превосходит

$$\left(\frac{5}{4}n + 8 + 8k\right) + (5(n-k) + 5) + 2 \cdot 2^k = \frac{25}{4}n + 3k + 13 + 2^{k+1}.$$

Поскольку всякая цепь от входа к выходу  $S'_f$  проходит через некоторый блок  $H'_{f_i^j\top}$ , то  $depth(S'_f) \leq \frac{25}{4}n + 3k + 13 + 2^{k+1}$ .

Оценим потенциал схемы  $S'_f$ . Потенциал схемы  $S'_f$  складывается из потенциала блока  $SH_n^{k\top}$ , потенциалов групп проводов  $W_i^j$ , потенциалов блоков  $H'_{f_i^j\top}$  и потенциалов проводов и дизъюнкций, идущих от выходов блоков  $H'_{f_i^j\top}$  к выходу схемы.

На каждом входном наборе  $(z, x_1, \dots, x_n)$  не более, чем на одной группе выходов блока  $S_n^k$  реализуется набор отличный от 0, а именно на выходах группы  $W_i^j$ , для которой  $\bar{i}^{(k)} = (x_{n-2k+1}, \dots, x_{n-k})$ ,  $\bar{j}^{(k)} = (x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ . Таким образом, на любом входном наборе не более одной активной группы проводов  $W_i^j$  и не более одного активного блока  $H'_{f_i^j\top}$ . Причём поскольку  $W_i^j = y_{2^{k_i+j}} D'_{s,4}(x_1, \dots, x_{n-2k})$ , то  $|W_i^j| \leq |D'_{s,4}(x_1, \dots, x_{n-2k})| \leq 4$ , то есть не более, чем на четырёх проводах из всей группы  $W_i^j$  будет единица. Длина проводов из группы  $W_i^j$  не превосходит полупериметра схемы, то есть  $8 \cdot (2^{n/2} + 2^{\frac{n-1}{2}}) + O(2^{n/4+2k}) = O(2^{n/2} + 2^{n/4+2k})$ . Значит потенциал на проводах из групп  $W_i^j$  также не больше  $O(2^{n/2} + 2^{n/4+2k})$ .

Потенциал блока  $H'_{f_i^j}{}^\top$  составляет  $O((n-2k)2^{\frac{n-2k}{2}})$ . Поскольку не более одного активного блока  $H'_{f_i^j}{}^\top$ , то не более, чем выход одного такого блока активен. Это означает, что не более одной цепи от выхода блока  $H'$  до выхода схемы активно. Длина цепи не превосходит полупериметра схемы  $S'_f$  и составляет  $O(2^{n/2})$ .

Просуммировав все потенциалы, получим

$$\begin{aligned}\widehat{U}(S'_f) &\leq \widehat{U}(SH_n^k) + O(2^{n/2} + 2^{n/4+2k}) + O((n-2k)2^{\frac{n-2k}{2}}) + O(2^{n/2}) = \\ &= O(n^2 2^{n/4} + 2^{n/4+4k}) + O(2^{n/2}) + O(n 2^{\frac{n-2k}{2}}) = \\ &= O(2^{n/2} + n 2^{\frac{n-2k}{2}}) + O(2^{n/4+2k}).\end{aligned}$$

Теперь положим  $k = \lfloor \log_2 n \rfloor - ((\lfloor \log_2 n \rfloor + \frac{n}{2}) \bmod 2)$ . Тогда  $\frac{n}{2} - k \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n - 2k \equiv 0 \pmod{4}$ , и мы можем построить схему  $S'_f$  с таким  $k$ . Тогда  $2^k \leq n$ ,  $2^{2k} = (2^k)^2 \leq n^2$ ,  $n 2^{\frac{n-2k}{2}} \asymp 2^{n/2}$ . Получаем

$$\begin{aligned}l(S'_f) &\leq 8 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} + O(2^{n/4+2k}) \lesssim 6 \cdot 2^{n/2}; \\ h(S'_f) &\leq 8 \cdot 2^{n/2} + O(2^{n/4+2k}) \sim 8 \cdot 2^{n/2}; \\ \text{depth}(S'_f) &\leq \frac{25}{4}n + 3k + 13 + 2^{k+1} \lesssim \frac{25}{4}n + 2n = \frac{33}{4}n < 9n; \\ \widehat{U}(S'_f) &= O(2^{n/2} + n 2^{\frac{n-2k}{2}}) + O(2^{n/4} + 2k) = O(2^{n/2}).\end{aligned}$$

Если  $n$  нечётно, то добавляем одну фиктивную переменную и строим схему  $S'_f$ , как для функции от  $n + 1$ -й переменной. В этом случае константы в оценках длины и ширины возрастут в  $\sqrt{2}$  раз, и, округлив их вверх, получим оценки в утверждение леммы. Схема  $S_f$  отличается от  $S'_f$  добавлением одного элемента 1, поэтому асимптотические оценки для  $S_f$  такие же, как для  $S'_f$ .  $\square$

### Построение схемы частичной булевой функции.

В работе Д.А.Жукова предложен метод декомпозиции частичной булевой функции, основанный на теореме А.В.Чашкина. Сформулируем его в виде леммы.

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

**Лемма 8.** Пусть  $\mathcal{D}$  – множество двоичных наборов длины  $n$ ,  $f$  – частичная булева функция, определенная на  $\mathcal{D}$ ,  $w < \log_2 |\mathcal{D}|$ . Тогда существуют такие линейные операторы  $L_0^i, L_1^i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{m_i}$  и булевы функции  $g_i^0, g_i^1 : \{0, 1\}^{m_i} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $i = \overline{0, w}$ , а также функция  $\tilde{f}$ , равная единице не более, чем на  $\frac{|\mathcal{D}|}{2^w}$  наборах, такие что

$$1) m_i = \lceil \log_2 |\mathcal{D}| \rceil + 1 - i$$

2) На области  $\mathcal{D}$  функция  $f$  представляется в виде

$$f = v_1 \vee u_1 v_2 \vee u_1 u_2 v_3 \vee \dots \vee u_1 u_2 \dots u_{w-1} v_w \tilde{f}, \quad (6)$$

$$\text{где } u_i(x) = g_1^i(L_1^i(x)), v_i(x) = u(x)g_0^i(L_0^i(x)).$$

Сформулируем ещё одну лемму, которая позволяет уменьшать количество переменных, от которых зависит частичная булева функция.

**Лемма 9.** Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $m \geq 2 \log_2 |\mathcal{D}|$ , то существует линейный оператор  $L_{\mathcal{D}}^m : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , инъективный на области  $\mathcal{D}$ .

*Доказательство.* Воспользуемся идеей доказательства из [4, Лемма 10.8]. За  $\mathcal{L}(n, m)$  обозначим множество всех линейных операторов  $L : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ . Для любых векторов  $x, y \in \{0, 1\}^n$ ,  $x \neq y$  существует  $2^{n-1}$  линейных функции  $l$ , сохраняющих 0, таких, что  $l(x) = l(y)$ . Значит есть  $2^{m(n-1)}$  линейных операторов  $L \in \mathcal{L}(n, m)$  таких, что  $L(x) = L(y)$ . В области  $\mathcal{D}$  Всего  $C_{|\mathcal{D}|}^2$  пар различных точек. Значит не более  $C_{|\mathcal{D}|}^2 2^{m(n-1)}$  операторов из  $\mathcal{L}$  склеивают хотя бы одну пару точек из  $\mathcal{D}$ .

$$\begin{aligned} C_{|\mathcal{D}|}^2 2^{m(n-1)} &< |\mathcal{D}|^2 2^{m(n-1)} = 2^{mn} \frac{|\mathcal{D}|^2}{2^m} \leq 2^{mn} \frac{|\mathcal{D}|^2}{2^{2 \log_2 |\mathcal{D}|}} = 2^{mn} = \\ &= |\mathcal{L}(n, m)|. \end{aligned}$$

Значит количество линейных операторов, склеивающих точки из  $\mathcal{D}$  строго меньше, чем количество всех линейных операторов, то есть в  $\mathcal{L}(n, m)$  существует оператор  $L_{\mathcal{D}}^m$ , инъективный на области  $\mathcal{D}$ . Лемма доказана.  $\square$

Эта лемма позволяет сводить реализацию частичной функции  $f$  от  $n$  переменных, определённой на области  $\mathcal{D}$  к реализации частичной функции  $\hat{f} = f \circ (L_{\mathcal{D}}^m)^{-1}$  от  $m$  переменных, определённой на области  $L_{\mathcal{D}}^m(\mathcal{D})$ .

При построении блока, реализующего частичную функцию, с целом будем следовать конструкции Жукова, заменяя блоки на аналогичные, имеющие меньшую мощность и глубину. Начнём с блока, реализующего функцию  $z\tilde{f}$  непосредственно через СДНФ функции  $f$ . За  $|f|$  будем обозначать количество наборов, на которых  $f$  не равна 0.

**Лемма 10.** *Для любой функции  $f$  от  $n$  переменных  $z, x_1, \dots, x_n$  существует схема  $\hat{S}'_f$ , реализующая функцию  $zf(x_1, \dots, x_n)$  при  $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ , с параметрами*

$$1) l(\hat{S}'_f) = O(n|f|), \quad h(\hat{S}'_f) = O(n \lceil \log_2 |f| \rceil);$$

$$2) \text{depth}(\hat{S}'_f) = O(\log_2 n|f|).$$

*Доказательство.* Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  равна единице на наборах  $\alpha^1, \dots, \alpha^{|f|}$ . Тогда строим схему по формуле

$$zf(x_1, \dots, x_n) = z \bigvee_{i=1}^{|f|} x_1^{\alpha_i^1} \dots x_n^{\alpha_i^n} = \bigvee_{i=1}^{|f|} zx_1^{\alpha_i^1} \dots x_n^{\alpha_i^n}. \quad (7)$$

Каждая конъюнкция вида  $zx_1^{\alpha_1^1} \dots x_n^{\alpha_n^n}$  реализуется схемой  $K_\alpha$ , изображённой на рисунке 13(а). На допустимых наборах  $z \geq x_i$ , поэтому  $x_i + z\bar{\alpha}_i = z(x_i + \bar{\alpha}_i) = zx_i^{\alpha_i}$ . Оценим длину  $l_n$ , ширину  $h_n$  и глубину  $d_n$  схемы  $K_\alpha$ . Проверим по индукции, что  $l_k = 2k$ ,  $h_k = 2 \lceil \log_2 k \rceil + 1$ ,  $d_k \leq 2 \lceil \log_2 k \rceil + 1$ .

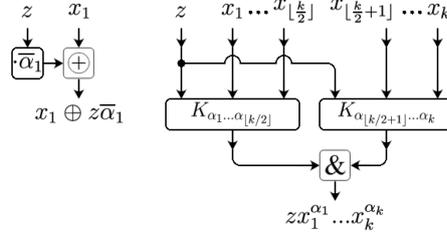
База индукции:  $l_1 = 2$ ,  $h_1 = 1$ ,  $d_1 \leq 1$ .

Шаг индукции:

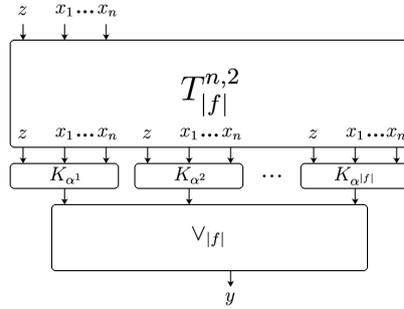
$$l_k = l_{\lfloor k/2 \rfloor} + l_{k - \lfloor k/2 \rfloor} = 2 \lfloor k/2 \rfloor + 2(k - \lfloor k/2 \rfloor) = 2k,$$

$$\begin{aligned} h_k &= \max(h_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, h_{k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}) + 2 = \\ &= 2 \max(\lceil \log_2 \lfloor k/2 \rfloor \rceil, \lceil \log_2(k - \lfloor k/2 \rfloor) \rceil) + 3 = 2 \lceil \log_2 k \rceil + 1, \end{aligned}$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы



(a) Блок конъюнкции  $K_\alpha$



(b) Схема  $\widehat{S}'_f$ , корректна при  $z \geq \bigvee_i x_i$

Рис. 13. Реализация частичной функции схемой с логарифмической глубиной через СДНФ.

$$\begin{aligned} d_k &= \max(d_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, d_{k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}) + 2 \leq \\ &\leq 2 \max(\lceil \log_2 \lfloor k/2 \rfloor \rceil, \lceil \log_2(k - \lfloor k/2 \rfloor) \rceil) + 3 = 2 \lceil \log_2 k \rceil + 1. \end{aligned}$$

Функцию  $f$  реализуем по формуле (7) схемой  $\widehat{S}'_f$ , изображённой на рисунке 13(b). Оценим параметры этой схемы.

$$l(\widehat{S}'_f) = l(T_{|f|}^{n,2}) \leq 2n|f| = O(n|f|).$$

$$\begin{aligned} h(\widehat{S}'_f) &= h(T_{|f|}^{n,2}) + h(K_\alpha) + h(V_{|f|}) = (n+1) \lceil \log_2 |f| + 1 \rceil + \\ &\quad + 2 \lceil \log_2 n \rceil + 1 + \\ &+ \lceil \log_2 |f| \rceil = O(n \log_2 |f|) + O(\log_2 n) + O(\log_2 |f|) = O(n \log_2 |f|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{depth}(\widehat{S}'_f) &\leq \text{depth}(T_{|f|}^{n,2}) + \text{depth}(K_\alpha) + \text{depth}(\vee_{|f|}) = \lceil \log_2 |f| \rceil + \\ &+ 2 \lceil \log_2 n \rceil + 1 + \lceil \log_2 |f| \rceil = O(\log_2 |f|) + O(\log_2 n) + O(\log_2 |f|) = \\ &= O(\log_2 n |f|). \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 11.** *Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^{8n}$ ,  $4(n-1) \leq \log_2 |\mathcal{D}|$ , то для любой частичной булевой функции  $f$  существует схема  $P_f$  с  $8 \cdot 2^n$  входами и одним выходом, реализующая функцию  $f'' := f' \circ D'_{n,8}{}^{-1}$  на множестве допустимых наборов  $D'_{n,8}(\{0, 1\} \times \mathcal{D})$  (как и раньше,  $f'(z, \vec{x}) = z f(\vec{x})$ ). Причем схема  $P_f$  имеет следующие параметры.*

$$\begin{aligned} l(P_f) &= O(\sqrt{|\mathcal{D}|}), \quad h(P_f) = O(\sqrt{|\mathcal{D}|}), \quad \text{depth}(P_f) = O(n), \\ \widehat{U}_{D'_{n,8}(\{0,1\}^{8n+1})}(P_f) &= O(\sqrt{|\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Определим функции  $u'_k(z, \vec{x}) := z u_k(\vec{x}) = z g_1^k(L_1^k(x))$ ,  $v'_k(z, \vec{x}) := z v_k(\vec{x}) = u'_k(z, \vec{x}) g_0^k(L_0^k(\vec{x}))$ ,  $u''_k := u'_k D'_{n,8}{}^{-1}$ ,  $v''_k := v'_k \circ D'_{n,8}{}^{-1}$ ,  $\tilde{f}'(z, \vec{x}) := z \tilde{f}(\vec{x})$ . С использованием этих обозначений мы можем записать

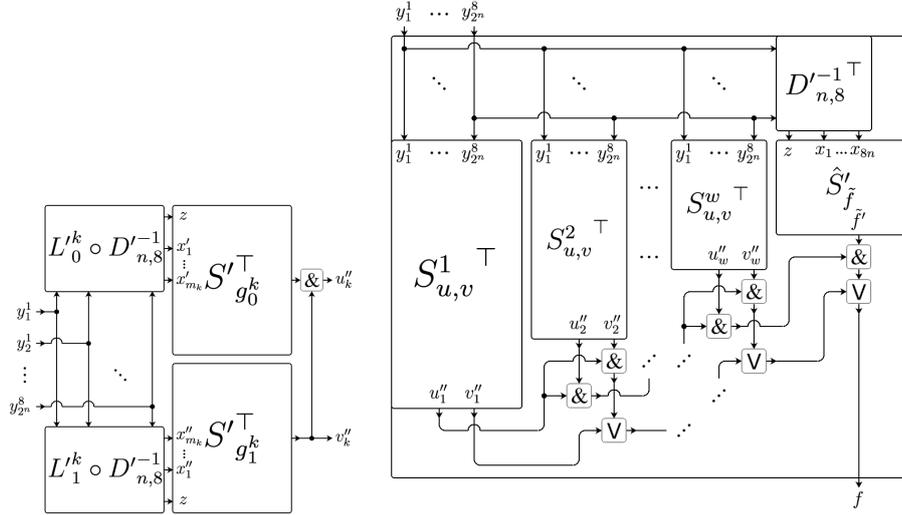
$$\begin{aligned} f' &= z f = z(v_1 \vee u_1 v_2 \vee \dots \vee u_1 u_2 \dots u_{w-1} v_w \tilde{f}) = \\ &= v'_1 \vee u'_1 v'_2 \vee \dots \vee u'_1 u'_2 \dots u'_{w-1} v'_w \tilde{f}'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' \circ D'_{n,8}{}^{-1} &= v'_1 \circ D'_{n,8}{}^{-1} \vee (u'_1 \circ D'_{n,8}{}^{-1})(v'_2 \circ D'_{n,8}{}^{-1}) \vee \dots \vee (u'_1 \circ D'_{n,8}{}^{-1}) \dots \\ &\dots (u'_{w-1} \circ D'_{n,8}{}^{-1}) \cdot (v'_w \circ D'_{n,8}{}^{-1})(\tilde{f}' \circ D'_{n,8}{}^{-1}) = v''_1 \vee u''_1 v''_2 \vee \dots \vee \\ &\vee u''_1 u''_2 \dots u''_{w-1} v''_w (\tilde{f}' \circ D'_{n,8}{}^{-1}); \quad (8) \end{aligned}$$

### Реализация функций $u''$ и $v''$ .

Схема блока, реализующего функции  $u''_k$  и  $v''_k$  изображена на рисунке 14(а). Нам нужно вычислить  $u'_k(D'_{n,8}{}^{-1}(y))$  и  $v'_k(D'_{n,8}{}^{-1}(y))$ , поэтому мы вычисляем сначала  $(z, x'_1, \dots, x'_{m_k}) =$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы



(а) Блок  $S_{u,v}^k$ , вычисляющий функции  $u_k$  и  $v_k$ . (б) Блок  $P_f$ , вычисляющий частичную функцию  $f$  (входы подключаются к блоку дешифраторов).

Рис. 14. Реализация частичной функции  $f$ .

$$\begin{aligned} (z, L_0^k(D_{n,8}^{-1}(y))) &= (L_0^k \circ D_{n,8}^{-1})(y) \quad \text{и} \quad (z, x''_1, \dots, x''_{m_k}) = \\ (z, L_1^k(D_{n,8}^{-1}(y))) &= (L_1^k \circ D_{n,8}^{-1})(y), \quad \text{где} \quad L_i^k(z, x_1, \dots, x_{8n}) = \\ (z, L_i^k(x_1, \dots, x_{8n})). \end{aligned}$$

Посчитаем характеристики блока  $S_{u,v}^k$ . Операторы  $D_{n,8}^{-1}$ ,  $L_i^k$  – линейные, поэтому их композиция  $(L_i^k \circ D_{n,8}^{-1})$  так же линейна и по лемме 3 может быть реализована схемой с длиной  $2 \cdot 8 \cdot 2^n - 1 = O(2^n)$ , шириной  $m_k(\lceil \log_2(8 \cdot 2^n) \rceil + 1) = O(m_k n)$  и глубиной  $m_k + \lceil \log_2 n \rceil = O(m_k + \log_2 n)$ . Функции  $g_i^k$  зависят от  $m_k$  переменных, поэтому  $l(S'_{g_i^k}) = O(2^{m_k/2})$ ,  $h(S'_{g_i^k}) = O(2^{m_k/2})$ ,  $depth(S'_{g_i^k}) = O(m_k)$ ,  $\hat{U}(S'_{g_i^k}) = O(2^{m_k/2})$ . Тогда

$$l(S_{u,v}) = l(L_i^k \circ D_{n,8}^{-1}) + l(S'_{g_0^k \top}) + 1 = O(2^n) + O(2^{m_k/2});$$

$$\begin{aligned} h(S_{u,v}) &= \max(h(S'_{g_0^k \top}) + h(S'_{g_1^k \top}), 8 \cdot 2^n + 2h(L_0^k \circ D_{n,8}^{-1})) = \\ &= O(\max(2^{m_k/2}, 2^n)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{depth}(S_{u,v}) &= 3 + \max(\text{depth}(S'_{g_0^k}) + \text{depth}(L_i^k \circ D_{n,8}^{-1}), \\ \text{depth}(S'_{g_1^k}) + \text{depth}(L_i^k \circ D_{n,8}^{-1})) &= O(m_k + \log_2 n) + O(m_k) = \\ &= O(m_k + \log_2 n). \end{aligned}$$

Поскольку на любом наборе  $(z, x_1, \dots, x_{8n}) \in \{0, 1\}^{8n+1}$  на выходе оператора  $D'_{n,8}$  будет не более 8 единиц, то не более 8 проводов, идущих от входов блока  $S_{u,v}$ , активны. Длина каждого такого провода не больше полупериметра схемы  $S_{u,v}$ , то есть  $O(2^{m_k/2})$ . Поэтому суммарный потенциал проводов в схеме  $S_{u,v}$  составляет  $O(2^{m_k/2})$ . Потенциал блоков  $L_i^k \circ D_{n,8}^{-1}$  оценим через их площадь, которая составляет  $O(m_k n 2^n)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{D'_{n,8}(\{0,1\}^{8n+1})}(S_{u,v}) &\leq O(2^{m_k/2}) + O(m_k n 2^n) + \widehat{U}(S'_{g_0^k}) + \widehat{U}(S'_{g_1^k}) = \\ &= O(2^{m_k/2} + m_k n 2^n). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\log_2 |\mathcal{D}|/8 \leq n \leq \log_2 |\mathcal{D}|/4 + 1$ ,  $m_k = \lceil \log_2 |\mathcal{D}| \rceil + 1 - k$ , то есть  $m_k = O(\log_2 |\mathcal{D}|) = O(n)$ ,  $2^{m_k} = O(\frac{|\mathcal{D}|}{2^k})$ ,  $2^n = O(\sqrt[4]{|\mathcal{D}|})$ , получим оценки

$$l(S_{u,v}) = O(2^{m_k/2}) = O\left(\frac{\sqrt{|\mathcal{D}|}}{2^{k/2}}\right);$$

$$\begin{aligned} h(S_{u,v}) &= O(\max(2^{m_k/2}, 2^n)) = \\ &= O\left(\frac{\sqrt{|\mathcal{D}|}}{2^{k/2}} + \sqrt[4]{|\mathcal{D}|}\right); \end{aligned}$$

$$\text{depth}(S_{u,v}) = O(m_k + n) = O(n) = O(\log_2 |\mathcal{D}|);$$

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{D'_{n,8}(\{0,1\}^{8n+1})}(S_{u,v}) &= O(2^{m_k/2} + m_k n 2^n) = \\ &= O\left(\frac{\sqrt{|\mathcal{D}|}}{2^{k/2}} + n^2 \sqrt[4]{|\mathcal{D}|}\right). \end{aligned}$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

### Реализация частичной функции $f$ .

Несложно убедиться, что схема  $P_f$ , изображённая на рисунке 14(b) реализует Функцию  $f''$  по формуле (8). Параметр  $w$  подберём чуть позже, пока отметим, что  $w \leq \log_2 |\mathcal{D}| = O(n)$ . Оценим параметры этой схемы.

$$\begin{aligned} l(P_f) &= \sum_{k=1}^w l(S_{u,v}^k) + l(\widehat{S}'_f) = \sum_{k=1}^w h(S_{u,v}^k) + O(n|\tilde{f}|) = \\ &= O\left(\sum_{k=1}^w \frac{\sqrt{|\mathcal{D}|}}{2^{k/2}} + w\sqrt[4]{|\mathcal{D}|}\right) + O\left(n\frac{|\mathcal{D}|}{2^w}\right) = O\left(\sqrt{|\mathcal{D}|} + n\frac{|\mathcal{D}|}{2^w}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h(P_f) &= \max_{k \in \{1, \dots, w\}} h(S_{u,v}^k) + 2 + h(D'_{n,8}) = \\ &= \max_{k \in \{1, \dots, w\}} l(S_{u,v}^k) + 2 + l(D'_{n,8}) = O(\sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(2^n) = \\ &= O(\sqrt{|\mathcal{D}|} + \sqrt[4]{|\mathcal{D}|}) = O(\sqrt{|\mathcal{D}|}). \end{aligned} \quad (10)$$

Глубина схемы  $P_f$  складывается из глубины проводов, идущих от входов схемы к блокам, глубины самих блоков и глубины подсхемы, расположенной под блоками. Каждый провод, идущий от входа схемы имеет  $w$  последовательных разветвлений, поэтому его глубина равна  $w$ . Подсхема, расположенная под блоками имеет в сумме  $4w - 2 = O(w)$  логических элементов и разветвлений, поэтому её глубина также не превосходит  $O(w)$ . Получаем

$$\begin{aligned} \text{depth}(P_f) &\leq \max\left(\max_{k \in \{1, \dots, w\}} \text{depth}(S_{u,v}^k), \text{depth}(\widehat{S}'_f) + \right. \\ &+ \left. \text{depth}(D'_{n,8})\right) + O(w) = O(\max(\log_2 |\mathcal{D}|, \log_2 n|\tilde{f}| + n)) + O(w) = \\ &= O(n) = O(\log_2 |\mathcal{D}|). \end{aligned} \quad (11)$$

Как мы отмечали при рассмотрении блока  $S_{u,v}^k$ , не более 8 проводов, идущих от входов схемы, могут быть одновременно активны. Каждый провод, идущий от входа, имеет горизонтальный участок длины не более  $l(P_f)$  и  $w$  вертикальных участков

длины  $h(D'_{n,8}{}^{-1\top}) = O(2^n)$ . Поэтому потенциал каждого провода не превосходит  $l(P_f) + O(w2^n) = O(l(P_f))$ . Поскольку не более 8 проводов активны одновременно, суммарный потенциал также составляет  $O(l(P_f))$ . Суммарная площадь, занимаемая элементами, расположенными под блоками  $S_{u,v}^k$ , не превосходит  $3(l(P_f) + h(P_f)) = O(l(P_f))$ . Потенциал блока  $\widehat{S}'_{\tilde{f}}$  не превосходит по порядку его площади, то есть

$$\widehat{U}(\widehat{S}'_{\tilde{f}}) = O(l(\widehat{S}'_{\tilde{f}})h(\widehat{S}'_{\tilde{f}})) = O(n^2|\tilde{f}|\log_2|\tilde{f}|) = O\left(n^3\frac{|\mathcal{D}|}{2^w}\right).$$

Аналогично оцениваем потенциал блока  $D'_{n,8}{}^{-1}$ .

$$\widehat{U}(D'_{n,8}{}^{-1}) = O(l(D'_{n,8}{}^{-1})h(D'_{n,8}{}^{-1})) = O(n^22^n) = O(n^2\sqrt[4]{|\mathcal{D}|}).$$

Теперь можем оценить потенциал всей схемы  $P_f$ .

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{D'_{n,8}(\{0,1\}^{8n+1})}(S_{u,v}) &= O(l(P_f)) + \widehat{U}(D'_{n,8}{}^{-1}) + \widehat{U}(\widehat{S}'_{\tilde{f}}) + \\ &+ \sum_{k=1}^w \widehat{U}_{D'_{n,8}(\{0,1\}^{8n+1})}(S_{u,v}^k) = \\ &= O\left(\sqrt{|\mathcal{D}|} + n\frac{|\mathcal{D}|}{2^w}\right) + O\left(n^3\frac{|\mathcal{D}|}{2^w}\right) + \\ &+ O(n^2\sqrt[4]{|\mathcal{D}|}) + O\left(\sum_{k=1}^w \frac{\sqrt{|\mathcal{D}|}}{2^{k/2}} + wn^2\sqrt[4]{|\mathcal{D}|}\right) = \\ &= O\left(\sqrt{|\mathcal{D}|} + n^3\frac{|\mathcal{D}|}{2^w}\right). \quad (12) \end{aligned}$$

Полагая  $w = \lceil \frac{2}{3} \log_2 |\mathcal{D}| \rceil$ , получаем  $n^3\frac{|\mathcal{D}|}{2^w} = O(\log_2^3 |\mathcal{D}| \sqrt[3]{|\mathcal{D}|}) = o(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ , и подставляя это значение в (9), (10), (11) и (12), получаем утверждение леммы.  $\square$

Отметим, что входы схемы  $P_f$  можно расположить и слева, а выход можно вывести в любой точке на границе схемы – это не повлияет на порядок потенциала.

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

Для реализации самой функции достаточно подключить схему  $P_f$  к блоку  $D'_{n,8}$  и подать на его вход  $z$  единицу. Не будем на этом подробно останавливаться, поскольку в следующем разделе мы будем строить более общую схему, реализующую булев оператор.

### Реализация частичного булева оператора.

Самый простой способ реализовать булев оператор  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  – подсоединить ко входу параллельно  $m$  блоков, каждый из которых реализует свою компоненту оператора. Однако при таком способе потенциал получится в  $m$  раз больше, чем нужно. Поэтому такого рода схему мы будем использовать только в качестве вспомогательного блока.

Далее для многих схем множеством допустимых наборов будет множество  $\mathcal{G}_n^k := D'_{n,k}(\{0, 1\}^{kn+1})$  – всевозможные наборы, которые могут получиться на выходе блока дешифраторов  $D'_{n,k}$ . Важным свойством этого множества является то, что в любом наборе из  $\mathcal{G}_n^k$  не более  $k$  единиц.

Пусть  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^{8n}$ ,  $4(n-1) \leq \log_2 |\mathcal{D}|$ ,  $m = kq \leq \log_2 |\mathcal{D}|$ . Тогда  $f = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{kq})$ . Определим операторы  $f'(z, \vec{x}) := zf(\vec{x}) = (zf_{11}(\vec{x}), \dots, zf_{kq}(\vec{x}))$  и  $f'' = (f''_{11}, \dots, f''_{kq}) := f' \circ D'^{-1}_{n,8}$ . Тогда по лемме 11 каждую функцию  $f''_{ij}$  можно реализовать схемой  $P_{f_{ij}}$  с длиной и шириной  $O(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ , глубиной  $O(\log_2 |\mathcal{D}|)$  и потенциалом на допустимых наборах  $O(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ . Из блоков  $P_{f_{ij}}$  можно составить схему  $\bar{B}_{k,q}^f$ , реализующую оператор  $f''$ , как показано на рисунке 15(a). Оценим параметры этой схемы.

$$\begin{aligned} l(\bar{B}_{k,q}^f) &= \sum_{j=1}^k \max_{i \in \{1, \dots, q\}} l(P_{f_{ij}}) + k \cdot 8 \cdot 2^n = \\ &= O(k\sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(k2^n) = O(k\sqrt{|\mathcal{D}|}); \\ h(\bar{B}_{k,q}^f) &= \sum_{i=1}^q \max_{j \in \{1, \dots, k\}} h(P_{f_{ij}}) + 8 \cdot 2^n + kq = \end{aligned}$$

Г. В. Калачев

$$\begin{aligned}
&= O(q\sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(kq + 2^n) = O(q\sqrt{|\mathcal{D}|}); \\
\text{depth}(\overline{B}_{k,q}^f) &\leq k + q + \max_{i,j} \text{depth}(P_{f_{ij}}) = \\
&= O(k + q + \log_2 |\mathcal{D}|) = O(\log_2 |\mathcal{D}|); \\
\widehat{U}_{\mathcal{G}_n^8}(\overline{B}_{k,q}^f) &\leq \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \widehat{U}_{\mathcal{G}_n^8}(P_{f_{ij}}) + 8kh(\overline{B}_{k,q}^f) + 8l(\overline{B}_{k,q}^f) + kql(\overline{B}_{k,q}^f) = \\
&= O(k^2q\sqrt{|\mathcal{D}|}).
\end{aligned}$$

Здесь при подсчёте потенциала мы опять использовали, что на наборах из  $\mathcal{G}_n^8$  не более 8 проводов, ведущих от входов схемы, активны.

Построим блок  $B_k^f$ , подключив дешифратор  $D_{k^2}$  к выходам блока  $\overline{B}_{k,k}^f$ , как изображено на рисунке 15(b). Несложно убедиться, что порядок длины, высоты, глубины и потенциала блока  $B_k^f$  такой же, как у блока  $\overline{B}_{k,k}^f$ . Этот блок реализует оператор  $f''' := D_{k^2} \circ f''$ .

**Лемма 12.** Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^{8n}$ ,  $m = k^2 \leq n \leq \frac{1}{4} \log_2 |\mathcal{D}| + 1$ , то для любого частичного оператора  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  существует схема  $C_{n,m}^f$ , реализующая оператор  $f''' := D_m \circ f' \circ D_{n,8}^{-1}$  с параметрами

$$\begin{aligned}
l(C_{n,m}^f) &= O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}), \quad h(C_{n,m}^f) = O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}), \\
\text{depth}(C_{n,m}^f) &= O(\log_2 |\mathcal{D}|), \\
\widehat{U}_{\mathcal{G}_n^8}(C_{n,m}^f) &= O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}).
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Для построения схемы с оптимальным потенциалом нам понадобится разбить область  $\mathcal{D}$  примерно на  $m^2$  подобластей одинакового размера. Положим  $q = \lceil \log_2 m \rceil$ ,  $s = 2^q$  и разобьём  $\mathcal{D}$  на  $s^2$  частей размера не более  $\lceil |\mathcal{D}|/s^2 \rceil$ . Обозначим эти части  $\mathcal{D}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s^2\}$ . Отметим, что  $s = 2^q = 2^{\lceil \log_2 m \rceil} \leq 2m = O(m)$ ,  $|\mathcal{D}_i| = O(|\mathcal{D}|/m^2)$ . Определим на области  $\mathcal{D}$  частичный оператор  $I_{\mathcal{D}}^q : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^{2q+1}$  с выходами  $z, d_1, \dots, d_{2q}$ , причём выход  $z$  тождественно равен 1, на выходах  $d_1, \dots, d_{2q}$  на

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

наборе  $x \in \mathcal{D}$  реализуется двоичная запись номера подобласти, в которой лежит  $x$ .

С использованием оператора  $I_{\mathcal{D}}$  мы можем построить схему  $I_{n,q}$ , изображённую на рисунке 16. Эта схема вычисляет конъюнкцию входных наборов с характеристическими функциями всех подобластей  $D'_{n,8}(\{1\} \times \mathcal{D}_i)$  области  $D'_{n,8}(\{1\} \times \mathcal{D})$ ,  $i, j \in \{0, \dots, 2^q - 1\}$ . Допустимыми наборами для схемы  $I_{n,q}$  будут все наборы из  $D'_{n,8}(\{0, 1\}^{8n+1})$ .

Проверим, что при подаче на вход схемы наборов из  $D'_{n,8}(\{0, 1\} \times \mathcal{D})$  на выходах дешифратора  $D'_{2q}$  вычисляются характеристические функции  $\chi_i$  областей  $D'_{n,8}(\{1\} \times \mathcal{D}_i)$ . Пусть на вход схемы подан набор  $(y_1^1, \dots, y_{2^q}^8) = D'_{n,8}(z, x_1, \dots, x_n)$ . Схема  $\overline{B}_{2q+1,1}^{I_{\mathcal{D}}^q}$  вычисляет оператор  $I''_{\mathcal{D}} = I'_{\mathcal{D}} \circ D'^{-1}_{n,8}$ , то есть на выходе блока  $\overline{B}_{2q+1,1}^{I_{\mathcal{D}}^q}$  будет реализовываться

$$\begin{aligned} I''_{\mathcal{D}}(y_1^1, \dots, y_{2^q}^8) &= (I'_{\mathcal{D}} \circ D'^{-1}_{n,8})(D'_{n,8}(z, x_1, \dots, x_{8n})) = \\ &= I'_{\mathcal{D}}(z, x_1, \dots, x_{8n}) = zI_{\mathcal{D}}^q(x_1, \dots, x_{8n}). \end{aligned}$$

Если  $z = 0$ , то на выходе также 0. Если  $z = 1$ , то на выходе  $z(1, d_1, \dots, d_{2^q}) = (1, d_1, \dots, d_{2^q})$ , где  $\overline{d_{2^q} \dots d_1}$  – двоичная запись номера подобласти, в которой оказался набор  $(x_1, \dots, x_{8n})$ . На выходе  $\chi_i$  дешифратора  $D'_{2q}$  реализуется функция

$$zd^{\bar{i}} = zd_1^{\bar{i}_1} \dots d_{2^q}^{\bar{i}_{2^q}} = \begin{cases} z, & \bar{i}^{(2q)} = d, \\ 0, & \bar{i}^{(2q)} \neq d. \end{cases}$$

То есть при  $z = 1$  на выходе  $\chi_i$  единица тогда и только тогда, когда двоичная запись  $\bar{i}$  совпадает с вектором  $d$ , то есть когда вектор  $(x_1, \dots, x_{8n})$  попал в область  $\mathcal{D}_i$ , что и требовалось.

Далее очевидным образом вычисляется конъюнкция всех значений  $\chi_i$  с входным вектором  $(y_1^1, \dots, y_{2^q}^8)$ .

Оценим параметры схемы  $I_{n,q}$ .

$$\begin{aligned} l(I_{n,q}) &= l(I_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}) + l(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q})^{\top} = \\ &= O(4^q \cdot 8 \cdot 2^n) + h(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q}) = O(m^2 2^n) + O(2q\sqrt{|\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(I_{n,q}) &\leq h(T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}) + h(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^l})^\top + 4^q + h(\&_{n+3}) = \\ &= O(2^n \log_2 4^q) + l(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q}) + O(m^2) + O(n) = O(q2^n) + O(\sqrt{|\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $|\mathcal{D}| \geq 2^{4n}$  и  $m \leq n$ , получаем, что  $l(I_{n,q}) = O(q\sqrt{|\mathcal{D}|})$ ,  $h(I_{n,q}) = O(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ .

Глубина схемы  $I_{n,q}$  не превосходит суммарной глубины всех блоков + 1 (одно разветвление). То есть

$$\begin{aligned} \text{depth}(I_{n,q}) &\leq 1 + \text{depth}(T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}) + \text{depth}(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q})^\top + \text{depth}(\&_{n+3}) = \\ &= O(\log_2 4^q) + O(\log_2 |\mathcal{D}|) + O(2q) + O(n) = O(\log_2 |\mathcal{D}|). \end{aligned}$$

Здесь мы учитывали, что  $q = \lceil \log_2 m \rceil \leq m \leq n \leq \frac{1}{4} \log_2 |\mathcal{D}| + 1$ .

Оценивая потенциал схемы  $I_{n,q}$ , отметим, что ниже выходов блока  $T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}$  расположена лишь часть блока  $\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q}$ ^\top высоты  $8 \cdot 2^n$ , необходимая для подведения проводов к этому блоку. Большая часть блока  $\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q}$ ^\top расположена выше выходов блока  $T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}$ . Таким образом, длина каждого провода, выходящего из  $T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}$  не превышает  $8 \cdot 2^n + 4^q + h(\&_{n+3}) = O(2^n)$ . Оценим потенциал каждой группы проводов.

- Поскольку на допустимых наборах не более 8 входов  $y_1^1, \dots, y_{2^n}^8$  равны единице, то в каждой группе проводов, идущих из  $T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}$ , не более 8 активных, то есть суммарный потенциал всех вертикальных проводов, выходящих из  $T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}$ , не более  $O(4^q 2^n) = O(m^2 2^n)$ .
- Аналогично суммарный потенциал проводов, выходящих из блоков  $\&_{n+3}$  составляет  $O(m^2 2^n)$ .
- Суммарная длина горизонтальных проводов, выходящих из блока  $D'_{2q}$ ^\top не превышает  $4^q l(T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}) = O(4^2 q 2^n) = O(m^4 2^n)$ .
- Суммарная длина проводов, соединяющих блок  $\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q}$ ^\top с блоком  $D'_{2q}$ , не превышает  $(2q+1)l(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_{\mathcal{D}}^q})^\top = O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|})$ .

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

- Суммарный потенциал горизонтальных проводов, идущих ко входам  $\overline{B}_{1,2q+1}^{I_q^\top}$ , не превышает  $8 \cdot 2^n \cdot 8 = O(2^n)$ , поскольку не более 8 из этих проводов активны.
- Длина проводов, соединяющих входы всей схемы со входами блока  $T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}$ , не превышает  $h(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_q^\top}) = O(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ . Поскольку не более 8 из этих проводов активны, то та же оценка верна для потенциала этих проводов.

Суммарный потенциал всех проводов равен

$$O(m^2 2^n) + O(m^4 2^n) + O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(2^n) + O(\sqrt{|\mathcal{D}|}) = O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}).$$

Потенциал всей схемы складывается из потенциала проводов и потенциала всех блоков.

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{\mathcal{G}_n^8}(I_{n,q}) &= O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}) + \widehat{U}_{\mathcal{G}_n^8}(\overline{B}_{1,2q+1}^{I_q^\top}) + \widehat{U}(T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2}) + 4^q \widehat{U}(\&_{n+3}) = \\ &= O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(q \sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(l(T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2})h(T_{4^q}^{8 \cdot 2^n, 2})) + \\ &+ O(4^q l(\&_{n+3})h(\&_{n+3})) = O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(q 4^q 2^n) + O(4^q n 2^n) = \\ &= O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}) + O(qm^2 2^n) + O(nm^2 2^n) = O(q^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем блок, направляющий входной набор  $(y_1^1, \dots, y_{2^n}^8)$  на одну из  $4^q$  групп выходов в зависимости от того, в какую из подобластей  $\mathcal{D}_i$  попал набор  $D_{n,8}^{-1}(y_1, \dots, y_{2^n}^8)$ . Осталось подключить  $i$ -ю группу выходов блока  $I_{n,q}$  к блоку, реализующему оператор  $f_{\mathcal{D}_i}$  – ограничение оператора  $f$  на область  $\mathcal{D}_i$ .

Рассмотрим схему, изображённую на рисунке 17(а). За  $W_i^j$  обозначены группы из  $8 \cdot 2^n$  проводов. Группа проводов  $W_i^j$  подключена к блоку  $B_k^{f_{\mathcal{D}_{si+j}}}$ , реализующему оператор  $f_{\mathcal{D}_{si+j}}'''$ . Тогда на выходах  $w_1^{si+j}, \dots, w_{2^m}^{si+j}$  этого блока реализуется оператор  $f_{\mathcal{D}_{si+j}}'''$ . На выходах  $w_1, \dots, w_{2^m}$  схемы  $M_f^s$  реализуется дизъюнкция соответствующих выходов блоков  $B_k^{f_{\mathcal{D}_{si+j}}}$ . То есть

$$(w_1, \dots, w_{2^m}) = \bigvee_{i=1}^s \bigvee_{j=1}^s f_{\mathcal{D}_{si+j}}'''(W_i^j).$$

Теперь подключим блок  $M_f^s$  к блоку  $I_{n,q}$  и получим схему  $C_{m,n}^f$  (рисунок 17(b)). При этом группа проводов  $W_i^j$  подключается к  $(si + j)$ -й группе выходов блока  $I_{n,q}$ , на которой реализуется функция  $\chi_{si+j}\vec{y}$ , где  $\chi_i = \chi_{D'_{n,8}(\{1\} \times \mathcal{D}_i)}(\vec{y})$  – характеристическая функция  $D'_{n,8}(\{1\} \times \mathcal{D}_i)$ . Таким образом, если на вход схемы  $C_{m,n}^f$  подан набор  $\vec{y} = (y_1^1, \dots, y_{2^n}^s) = D'_{n,8}(1, \vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{8n}) \in \mathcal{D}$ , то на выходах схемы будет вектор

$$\begin{aligned} (w_1, \dots, w_m) &= \bigvee_{i=1}^s \bigvee_{j=1}^s f_{\mathcal{D}_{si+j}}'''(W_i^j) = \bigvee_{i=1}^s \bigvee_{j=1}^s f_{\mathcal{D}_{si+j}}'''(\chi_{si+j}\vec{y}) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{s^2} D_m(\chi_i f_{\mathcal{D}_i}''(D'_{n,8}(1, \vec{x}))) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{s^2} D_m(\chi_{D'_{n,8}(\{1\} \times \mathcal{D}_i)}(D'_{n,8}(1, \vec{x})) f_{\mathcal{D}_i}'(1, \vec{x})) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{s^2} D_m(\chi_{\mathcal{D}_i}(\vec{x}) f_{\mathcal{D}_i}(\vec{x})). \end{aligned}$$

Поскольку  $x \in \mathcal{D}$  и  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{D}_{s^2}$ , то существует единственное  $i$  такое, что  $x \in \mathcal{D}_i$ , то есть  $\chi_{\mathcal{D}_i}(\vec{x}) = 1$ . Тогда  $\chi_{\mathcal{D}_j}(\vec{x}) = 0$  для всех  $j \neq i$ . Поскольку  $D_m$  сохраняет 0, то  $D_m(\chi_{\mathcal{D}_j}(\vec{x}) f_{\mathcal{D}_j}(\vec{x})) = 0$  при  $j \neq i$ , поэтому

$$\begin{aligned} (w_1, \dots, w_{2^m}) &= D_m(\chi_{\mathcal{D}_i}(\vec{x}) f_{\mathcal{D}_i}(\vec{x})) = D_m(f_{\mathcal{D}_i}(\vec{x})) = D_m(f(\vec{x})) = \\ &= D_m(f'(1, \vec{x})). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $f_{\mathcal{D}_i}$  совпадает с  $f$  на области  $\mathcal{D}_i$ .

Таким образом, мы показали, что на наборах  $\vec{y} \in D'_{n,8}(\{1\} \times \mathcal{D})$  блок  $C_{m,n}^f$  реализует оператор  $D_m \circ f' \circ D_{n,8}^{-1} = f'''$ .

Оценим характеристики блоков  $M_f^s$  и  $C_{m,n}^f$ . Учитывая, что длина и ширина блоков  $B_k^{f_{\mathcal{D}_i}}$  составляет  $O(k\sqrt{|\mathcal{D}_i|}) = O(\sqrt{m}\sqrt{\frac{|\mathcal{D}|}{m^2}}) = O(\sqrt{\frac{|\mathcal{D}|}{m}})$ , получим

$$l(M_f^s) = s^2 \cdot 8 \cdot 2^n + \sum_{j=1}^s \max_{i \in \{1, \dots, s\}} l(B_k^{f_{\mathcal{D}_{is+j}}}) + 4 \cdot 2^{m/4} =$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

$$\begin{aligned}
&= O(s^2 2^n) + O\left(s \sqrt{\frac{|\mathcal{D}|}{m}}\right) = O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}). \\
h(M_f^s) &= s^2 \cdot 8 \cdot 2^n + \sum_{i=1}^s \max_{j \in \{1, \dots, s\}} h(B_k^{f_{\mathcal{D}_i} + j}) + s \cdot 4 \cdot 2^{m/4} = \\
&= O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}).
\end{aligned}$$

В схеме  $M_f^s$  каждая цепь от входа к выходу проходит не более, чем через  $s$  дизъюнкций и блок  $B_k^{f_{\mathcal{D}_i}}$ . Отсюда

$$\begin{aligned}
\text{depth}(M_f^s) &\leq s + \max_{i \leq s^2} \text{depth}(B_k^{f_{\mathcal{D}_i}}) = O(m) + O(\max_i (\log_2 |\mathcal{D}_i|)) = \\
&= O(\log_2 |\mathcal{D}|).
\end{aligned}$$

Оценим теперь потенциал блока  $M_f^s$  в составе схемы  $C_{n,m}^f$  на множестве  $\mathcal{G}_n^s$  допустимых наборов. Поскольку не более, чем одна группа выходов схемы  $I_{n,q}$  может быть активна, то не более, чем на одной группе входов  $W_i^j$  блока  $M_f^s$  значения, отличные от 0 и не более, чем один из блоков  $B_k^{f_{\mathcal{D}_i}}$  активен. Оценим по отдельности потенциал частей схемы  $M_f^s$ .

- Поскольку  $W_i^j = \chi_{si+j} \vec{y}$ ,  $y \in \mathcal{G}_n^s$ , то не более 8 проводов внутри одной группы могут быть одновременно активны. Получаем, что не более 8 входов схемы  $M_f^s$  могут быть одновременно активны. Длина каждого провода, идущего от входа  $M_f^s$ , не превосходит полупериметра схемы, то есть  $O(\sqrt{m|\mathcal{D}|})$ . Значит и суммарный потенциал проводов, идущих от входов схемы  $M_f^s$  составляет  $O(\sqrt{m|\mathcal{D}|})$ .
- Поскольку не более, чем один из блоков  $B_k^{f_{\mathcal{D}_i}}$  активен, то суммарный потенциал блоков не превосходит

$$\begin{aligned}
\max_i \widehat{U}_{\mathcal{G}_n^s}(B_k^{f_{\mathcal{D}_i}}) &= O\left(k^3 \max_i \sqrt{|\mathcal{D}_i|}\right) = O\left(m^{3/2} \sqrt{\frac{|\mathcal{D}|}{m^2}}\right) = \\
&= O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}).
\end{aligned}$$

- Из всех проводов и дизъюнкций, соединяющих выходы блоков  $B_k^{\mathcal{D}_i}$  с выходом схемы  $M_f^s$  активны только те, присоединены к выходам активного блока. Поскольку выходы блока  $B_k^{\mathcal{D}_i}$  являются выходами дешифратора  $D_m$ , то не более, чем один выход может быть активным. Таким образом, активно не более одной цепи, соединяющей выходы активного блока с выходами схемы. Длина каждой цепи не превосходит полупериметра схемы  $M_f^s$ , то есть  $O(\sqrt{m|\mathcal{D}|})$ . Значит потенциал этой цепи тоже равен  $O(\sqrt{m|\mathcal{D}|})$ .

Прибавляя потенциал блока  $I_{n,q}$ , получим

$$\begin{aligned}\widehat{U}_{G_n^s}(C_{n,m}^f) &= O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}) + \widehat{U}_{G_n^s}(q^2\sqrt{|\mathcal{D}|}) = \\ &= O((\sqrt{m} + \log_2^2 m)\sqrt{|\mathcal{D}|}) = O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}).\end{aligned}$$

Складывая размеры и глубину блоков  $I_{n,q}$  и  $M_f^s$ , получим

$$\begin{aligned}l(C_{n,m}^f) &= \max(l(M_f^s), l(I_{n,q})) = O(\max(\sqrt{m|\mathcal{D}|}, q\sqrt{|\mathcal{D}|})) = \\ &= O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}).\end{aligned}$$

$$h(C_{n,m}^f) = h(M_f^s) + h(I_{n,q}) = O(\sqrt{m|\mathcal{D}|} + \sqrt{|\mathcal{D}|}) = O(\sqrt{m|\mathcal{D}|}).$$

$$\text{depth}(C_{n,m}^f) \leq \text{depth}(M_f^s) + \text{depth}(I_{n,q}) = O(\log_2 |\mathcal{D}|).$$

Лемма доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 1.* Положим  $n' = \left\lceil \frac{\log_2 |\mathcal{D}|}{4} \right\rceil$ . Если  $\mathcal{D} \in \{0, 1\}^n$ , то по лемме 9 существует линейный оператор  $L_{\mathcal{D}} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{8n'}$ , инъективный на области  $\mathcal{D}$ . Обозначим  $\overline{\mathcal{D}} := L_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ . На области  $\overline{\mathcal{D}}$  определён обратный оператор  $L_{\mathcal{D}}^{-1}$ . Определим частичную функцию  $\tilde{f} := f \circ L_{\mathcal{D}}^{-1} : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \{0, 1\}^m$ .

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

**Случай**  $m = pk^2$ ,  $k^2 \leq n'$ .

Пусть  $f = (f_1, \dots, f_p)$ ,  $f_j = (f_{j,1}, \dots, f_{j,k^2}) : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^{k^2}$ ;  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_p)$ , где  $\tilde{f}_i = f_i \circ L_{\mathcal{D}}^{-1} : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \{0, 1\}^{k^2}$ . Тогда для оператора  $\tilde{f}_i$  и области  $\overline{\mathcal{D}}$  выполнены условия леммы 12, и мы можем построить схемы  $C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}$ , реализующие операторы  $\tilde{f}_i''' = D_{k^2} \circ \tilde{f}_i' \circ D_{n',8}^{-1}$  с параметрами

$$l(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) = O(\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}), \quad h(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) = O(\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}),$$

$$\text{depth}(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) = O(\log_2 |\mathcal{D}|),$$

$$\widehat{U}_{G_n}(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) = O(\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}).$$

Построим схему  $Q_f$  оператора  $f$ , как показано на рисунке 18. Убедимся, что на  $i$ -й группе выходов схемы  $Q_f$  действительно реализуется оператор  $f_i$ .

$$\begin{aligned} D_{k^2}^{-1}(\tilde{f}_i'''(D_{n',8}^{-1}(1, L_{\mathcal{D}}(\vec{x})))) &= \\ &= (D_{k^2}^{-1} \circ (D_{k^2} \circ \tilde{f}_i' \circ D_{n',8}^{-1}) \circ D_{n',8}^{-1})(1, L_{\mathcal{D}}(\vec{x})) = \tilde{f}_i'(1, L_{\mathcal{D}}(\vec{x})) = \\ &= \tilde{f}_i(L_{\mathcal{D}}(\vec{x})) = f_i(\vec{x}). \end{aligned}$$

Оценим параметры этой схемы.

$$\begin{aligned} l(Q_f) &\leq l(L_{\mathcal{D}}^{\top}) + 1 + l(D_{n',8}^{\top}) + \sum_{i=1}^p l(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) = h(L_{\mathcal{D}}) + h(D_{n',8}^{\top}) + \\ &+ O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}) = O(n' \log n) + O(n'^2) + O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}) = O(\log_2^2 |\mathcal{D}| + \\ &+ p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}) = O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(Q_f) &\leq h(D_{n',8}^{\top}) + \max\left(h(L_{\mathcal{D}}^{\top}), \max_{i \in \{1, \dots, p\}} h(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) + h(D_{k^2}^{-1})\right) = \\ &= O(2^{n'}) + O(\max(n, \sqrt{k^2|\mathcal{D}|} + k^4)) = O(\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{depth}(Q_f) &\leq \text{depth}(L_{\mathcal{D}}) + \text{depth}(D'_{n',8}) + p + \\ &+ \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \text{depth}(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) + \text{depth}(D_{k^2}^{-1}) = O(n' + \log_2 n) + O(n') + p + \\ &+ O(\log_2 |\mathcal{D}|) + O(m) = O(\log_2 |\mathcal{D}| + p). \end{aligned}$$

Для подсчёта потенциала заметим, что не более 8 проводов, идущих от блока  $D'_{n',8}$  к блокам  $C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}$ , активны. Длина горизонтальной части каждого провода не превосходит  $l(Q_f) = O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|})$ . Вертикальные компоненты каждого провода имеют суммарную длину не более  $ph(D'_{n',8}^\top) = O(p2^{n'})$ . Таким образом, общая длина каждого провода составляет  $O(p(2^{n'} + \sqrt{k^2|\mathcal{D}|})) = O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|})$ . Значит и потенциал этих проводов не больше  $O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|})$ . Суммарная длина проводов, идущих от блока  $L_{\mathcal{D}}$  к блоку  $D'_{n',8}$  не больше  $8n'(8n' + 1 + l(L_{\mathcal{D}}^\top)) = O(n'^2 \log_2 n) = o(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ . Теперь мы можем оценить потенциал всей схемы  $Q_f$ .

$$\begin{aligned} \widehat{U}(Q_f) &\leq \widehat{U}(L_{\mathcal{D}}) + \widehat{U}(D'_{n',8}) + O(l(Q_f)) + \\ &+ \sum_{i=1}^p \widehat{U}_{D'_{n',8}(\{0,1\}^{8n'+1})}(C_{n',k^2}^{\tilde{f}_i}) + p\widehat{U}(D_{k^2}^{-1}) = O(nn' \log_2 n) + O(n'^2 2^{n'}) + \\ &+ O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}) + O(k^4 2^{k^2}) = O(n \log_2^2 |\mathcal{D}| + p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

**Общий случай.**

В общем случае положим  $k := \min(\lceil \sqrt{m} \rceil, \lfloor \sqrt{n'} \rfloor)$ ,  $p := \lceil m/k^2 \rceil$ ,  $m' := pk^2$ . Тогда

$$\begin{aligned} m' &\asymp m, \quad k^2 \asymp \min(m, n') \asymp \min(m, \log_2 |\mathcal{D}|), \\ p &= \frac{m'}{k^2} = O\left(\frac{m'}{\min(m, \log_2 |\mathcal{D}|)}\right) = O\left(\max\left(1, \frac{m}{\log_2 |\mathcal{D}|}\right)\right). \end{aligned}$$

Определим оператор  $\hat{f} : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^{m'}$ ,  $\hat{f}(x) := (f(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{m'-m})$ .

Блок  $Q_f$  реализует оператор  $\hat{f}$  и имеет  $m' - m$  тождественно нулевых выходов, которые нужно удалить, чтобы получить схему

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

$Q_f$ , реализующую оператор  $f$ .

$$\begin{aligned} S(Q_f) &= l(Q_f)h(Q_f) \leq l(Q_{\hat{f}})h(Q_{\hat{f}}) = O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}) = \\ &= O(pk^2|\mathcal{D}|) = O(m|\mathcal{D}|). \end{aligned}$$

$$\text{depth}(Q_f) \leq \text{depth}(Q_{\hat{f}}) = O(\log_2 |\mathcal{D}| + p) = O\left(\log_2 |\mathcal{D}| + \frac{m}{\log_2 |\mathcal{D}|}\right).$$

$$\begin{aligned} \widehat{U}(Q_f) &\leq \widehat{U}(Q_{\hat{f}}) = O(n \log_2^2 |\mathcal{D}| + p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}) = O(p\sqrt{k^2|\mathcal{D}|}) = \\ &= O(\max(n \log_2^2 n, pk\sqrt{|\mathcal{D}|})). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что если  $|\mathcal{D}| \leq n^6$ , то  $n \log_2^2 |\mathcal{D}| \leq O(n \log_2^2 n)$ ; иначе  $|\mathcal{D}| > n^6$ , поэтому  $n \log_2^2 |\mathcal{D}| \leq n^3 < \sqrt{|\mathcal{D}|} = O(pk\sqrt{|\mathcal{D}|})$ . Получаем

$$pk = \frac{m'}{k} = O\left(\frac{m}{\sqrt{\min(m, \log_2 |\mathcal{D}|)}}\right),$$

$$\widehat{U}(Q_f) = O\left(\max\left(n \log_2^2 n, \frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |\mathcal{D}|)}}\right)\right).$$

Теорема доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Будем использовать все обозначения из доказательства теоремы 1. При  $m = O(\log_2^2 |\mathcal{D}|)$  теорема 2 следует из теоремы 1. Поэтому далее мы считаем, что  $m > n'^2$ ; в частности,  $k = \lfloor \sqrt{n'} \rfloor$ ,  $\sqrt{n'} \asymp \sqrt{\log_2 |\mathcal{D}|}$ . Также из условий теоремы сразу следует, что  $n \log_2^2 n = O(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ .

Рассмотрим случай  $p = st$ , где  $t = \lceil \log_2 m \rceil$ . Тогда функцию  $f$  можно представить в виде  $f = (f^1, \dots, f^t)$ ,  $f^i : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^{k^2 s}$ . Для каждого оператора  $f^i$  построим схему  $Q'_{f_i}$  – часть схемы  $Q_f$ , обведённая на рисунке 18 прямоугольником. Построим с использованием блоков  $Q'_{f_i}$  схему  $\tilde{Q}_f$ , изображённую на рисунке 19. По функционированию схема  $\tilde{Q}_f$  не отличается от схемы  $Q_f$  – отличается только расположением блоков и способ разветвления проводов. В блоке  $T_s^{8 \cdot 2^{n'}, 1, d'}$  расстояние  $d'$  между группами выходов

подобрано так, чтобы напротив  $i$ -й группы можно было разместить блок  $Q'_{fi}$ . Достаточно взять  $d' = \max h(Q'_{fi}) = O(\sqrt{k^2 \mathcal{D}})$ .

Посчитаем характеристики схемы  $\tilde{Q}_f$ .

$$\begin{aligned} l(\tilde{Q}_f) &\leq l(L_{\mathcal{D}}) + 1 + l(D'_{n',8}{}^{\top}) + l(T_s^{8 \cdot 2^{n'}, 1, d'}{}^{\top}) + \max_{i \in \{1, \dots, s\}} l(Q'_{fi}) = \\ &= O(n) + O(n'^2) + O(2^{n'} \log_2 s) + O(t\sqrt{k^2 |\mathcal{D}|}) = O(t\sqrt{k^2 |\mathcal{D}|}). \end{aligned}$$

$$h(\tilde{Q}_f) = \sum_{i=1}^s h(Q'_{fi}) = O(s\sqrt{k^2 |\mathcal{D}|}).$$

$$\begin{aligned} \text{depth}(\tilde{Q}_f) &\leq \text{depth}(L_{\mathcal{D}}) + \text{depth}(D'_{n',8}) + \text{depth}(T_s^{8 \cdot 2^{n'}, 1, d'}) + \\ &\quad + \max_{i \in \{1, \dots, s\}} \text{depth}(\tilde{Q}_{fi}) = O(\log_2 n + n') + O(\log_2 t) + \\ &\quad + O\left(\log_2 |\mathcal{D}| + \frac{tk^2}{\log_2 |\mathcal{D}|}\right) = \\ &= O(\log_2 t) + O(\log_2 |\mathcal{D}| + \log_2 m) = O(\log_2 m |\mathcal{D}|). \end{aligned}$$

Поскольку входы блока  $T_s^{8 \cdot 2^{n'}, 1, d'}$  подключены к выходам дешифратора  $D'_{n',8}$ , то все наборы, подаваемые на вход  $T_s^{8 \cdot 2^{n'}, 1, d'}$  лежат в области  $\mathcal{G}_{n'}^8$  и содержат не более 8 единиц. Из леммы 6 следует, что

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{\mathcal{G}_{n'}^8}(T_s^{8 \cdot 2^{n'}, 1, d'}) &\leq 8s(8 \cdot 2^{n'} + d')(\lceil \log_2 s + 1 \rceil) = \\ &= O(s(2^{n'} + \sqrt{k^2 |\mathcal{D}|}) \log_2 s) = O\left(\frac{m}{tk^2} \sqrt{k^2 |\mathcal{D}|} \log_2 m\right) = \\ &= O\left(\frac{m}{k \log_2 m} \sqrt{|\mathcal{D}|} \log_2 m\right) = O\left(\frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{k}\right). \end{aligned}$$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

$$\begin{aligned}
\widehat{U}(\tilde{Q}_f) &\leq \widehat{U}(L_{\mathcal{D}}) + \widehat{U}(D'_{n',s}) + \widehat{U}_{G_{n'}^s}(T_s^{8 \cdot 2^{n'}, 1, d'}) + \sum_{i=1}^s \widehat{U}_{G_{n'}^s}(Q'_{fi}) \leq \\
&\leq O(nn' \log_2 n) + O(n'^2 2^{n'}) + O\left(\frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{k}\right) + \sum_{i=1}^s \widehat{U}(Q_{fi}) = \\
&= O\left(n \log_2^2 |\mathcal{D}| + \frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{k}\right) + O\left(s \frac{tk^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\min(tk^2, \log_2 |\mathcal{D}|)}}\right) = \\
&= O\left(\frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{k} + \frac{stk^2 \sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\log_2 |\mathcal{D}|}}\right) = O\left(\frac{m\sqrt{|\mathcal{D}|}}{\sqrt{\log_2 |\mathcal{D}|}}\right).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что при  $m > \log_2 |\mathcal{D}|$  это и есть требуемая оценка на потенциал. Теорема доказана.  $\square$

*Доказательство утверждения 1.* По лемме [3, Лемма 5] количество схем площади  $N$  не превосходит  $2^{15N}$ . Количество частичных операторов с областью определения  $\mathcal{D}$  и  $m$  выходами равно  $2^{m|\mathcal{D}|}$ . Каждая схема с  $n$  входами и  $m$  выходами реализует не более  $n!m!$  операторов, отличающихся перестановкой входов и выходов. То есть при помощи схем площади не более  $N$  мы можем реализовать не более  $n!m!2^{15N}$  различных операторов с  $n$  входами и  $m$  выходами. То есть доля операторов  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$ , реализуемых схемами площади  $\frac{1}{16}m|\mathcal{D}|$ , не больше

$$\begin{aligned}
\frac{n!m!2^{\frac{15}{16}m|\mathcal{D}|}}{2^{m|\mathcal{D}|}} &\leq \frac{1}{2^{m(\frac{1}{16}|\mathcal{D}| - \log_2 m) - n \log_2 n}} = \frac{1}{2^{m(\frac{1}{16}|\mathcal{D}| - o(|\mathcal{D}|)) - o(|\mathcal{D}|)}} = \\
&= \frac{1}{2^{\frac{1}{16}m|\mathcal{D}|(1+o(1))}}.
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что по условию  $\log_2 m = o(|\mathcal{D}|)$  и  $n = O(\sqrt{|\mathcal{D}|})$ . То есть доля схем стремится к 0 при  $m|\mathcal{D}| \rightarrow \infty$ .

Теперь посчитаем глубину почти всех функций. Из нижних оценок Лупанова следует, что количество логических элементов в схемах, реализующих почти все операторы  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$ , асимптотически не меньше  $\frac{m|\mathcal{D}|}{\log_2 m|\mathcal{D}|}$ .

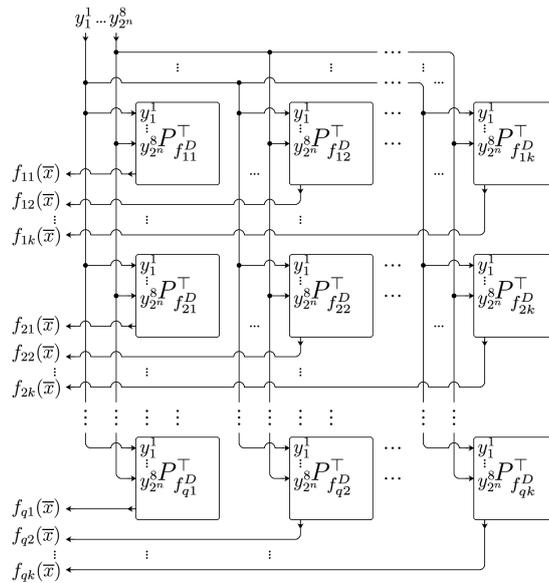
Г. В. Калачев

Пусть схема  $K$  с  $n$  входами содержит  $N$  логических элементов и разветвлений,  $N \gtrsim \frac{m|\mathcal{D}|}{\log_2 m|\mathcal{D}|}$ . Каждый элемент соединён цепью с некоторым входом схемы. Поскольку всего  $n$  входов и  $N$  элементов, то существует вход, от которого цепи ведут к  $N/n$  элементам. Все элементы разобьём на слои. 0-м слоем будут входы схемы;  $i$ -м слоем будут все элементы, к которым от входа ведут цепи веса  $i$ . Тогда каждый элемент на  $i$ -м слое соединён с элементами  $(i-1)$ -го слоя цепью веса 0 (то есть не содержащей логических элементов и разветвлений). К каждому элементу  $(i-1)$ -го слоя не может быть подсоединено более 3-х элементов  $i$ -го слоя, поскольку он имеет не более 3-х выходов. Это означает, что количество элементов на  $i$ -м слое не более, чем в 3 раза больше, чем на  $(i-1)$ -м. Поскольку на 0-м слое  $n$  элементов, то на  $i$ -м слое не более  $3^i n$  элементов, а всего на первых  $i$  слоях не более  $n(1 + 3 + \dots + 3^i) < \frac{3^{i+1}n}{2}$  элементов. То есть количество слоёв не меньше  $\log_3 \frac{2N}{3n}$ . Глубина схемы не меньше, чем количество слоёв, то есть

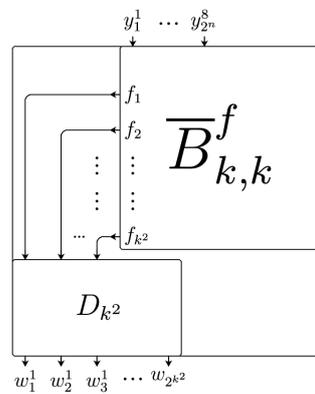
$$\begin{aligned} \text{depth}(K) &\geq \log_3 \frac{2N}{3n} \gtrsim \log_3 \frac{2m|\mathcal{D}|}{3n \log_2 m|\mathcal{D}|} \geq \\ &\geq \log_3 \frac{2m|\mathcal{D}|}{3\sqrt{|\mathcal{D}|} \log_2 m|\mathcal{D}|} \asymp \log_2 m|\mathcal{D}|. \end{aligned}$$

Мы показали, что почти все операторы  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}^m$  имеют площадь по порядку не меньше  $m|\mathcal{D}|$  и глубину не меньше  $\log_2 m|\mathcal{D}|$ . Утверждение доказано.  $\square$

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы



(а) Блок  $\overline{B}_{k,q}^f$ , вычисляющий булев оператор  $f'' = (f''_{11}, \dots, f''_{qk})$ .



(б) Блок  $B_k^f$ , вычисляющий булев оператор  $f''' = (f'''_{11}, \dots, f'''_{kk})$  с блоком дешифраторов на выходах.

Рис. 15.

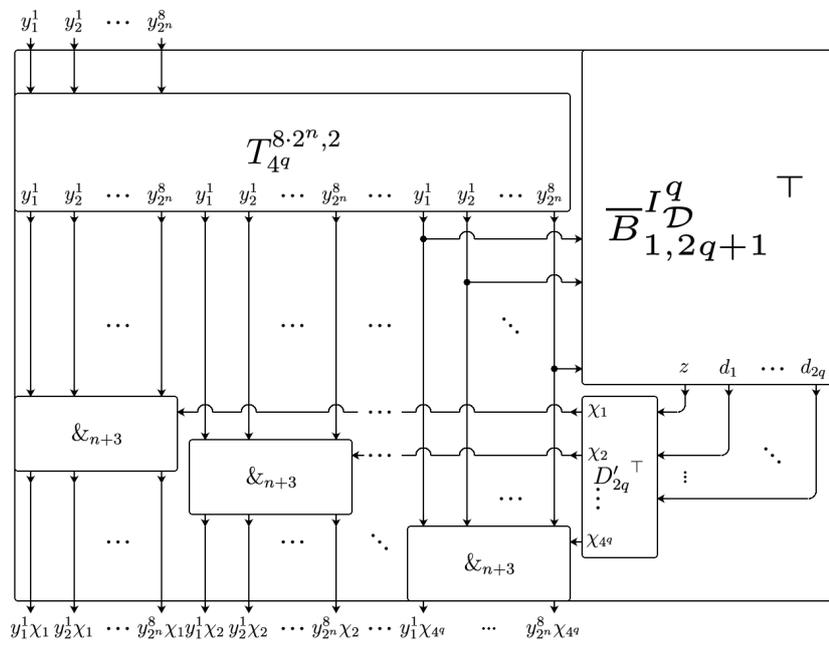
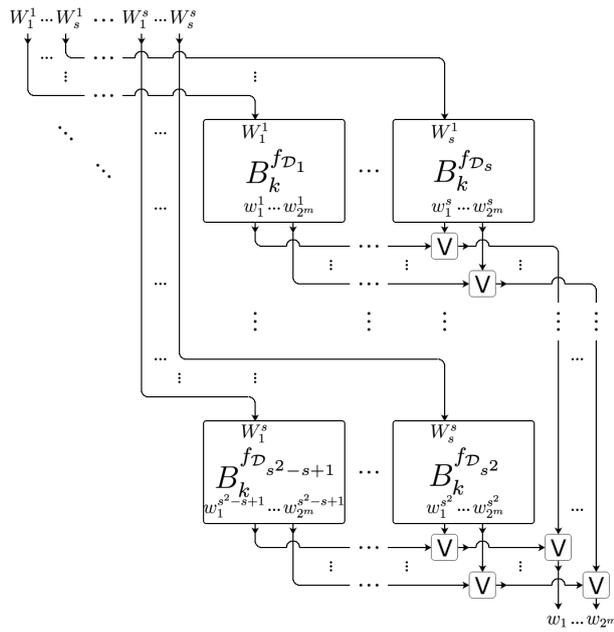
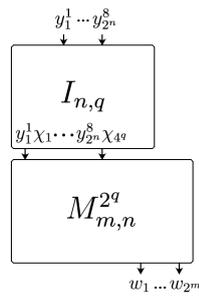


Рис. 16. Блок  $I_{n,q}$ , разбивающий область определения  $\mathcal{D}$  на  $2^{2q}$  подобластей.

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы



(a) Блок  $M_f^s$



(b) Блок  $C_{n,m}^f$

Рис. 17.

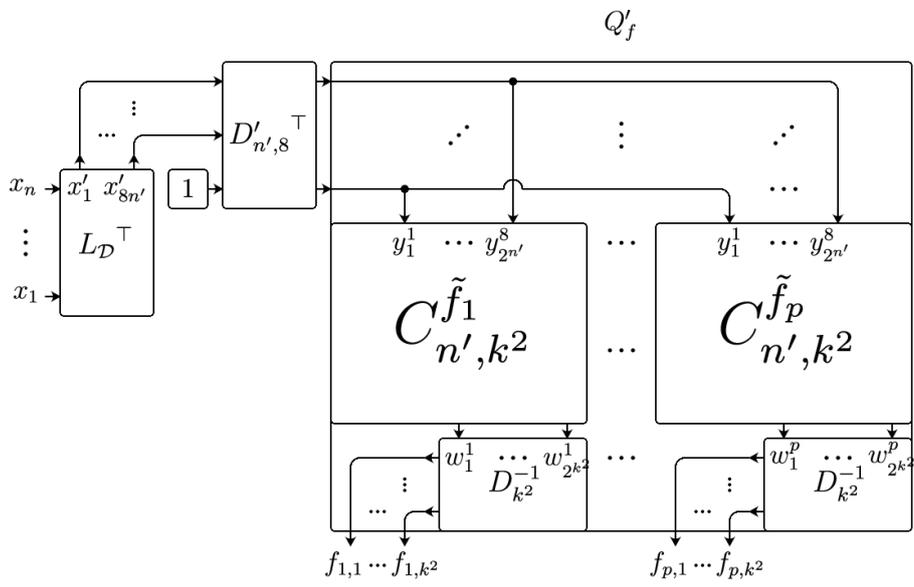


Рис. 18. Схема  $Q'_f$  для частичного оператора  $f$  при  $m = pk^2$ ,  $k^2 \leq n'$  и её часть  $Q'_f$ .

Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

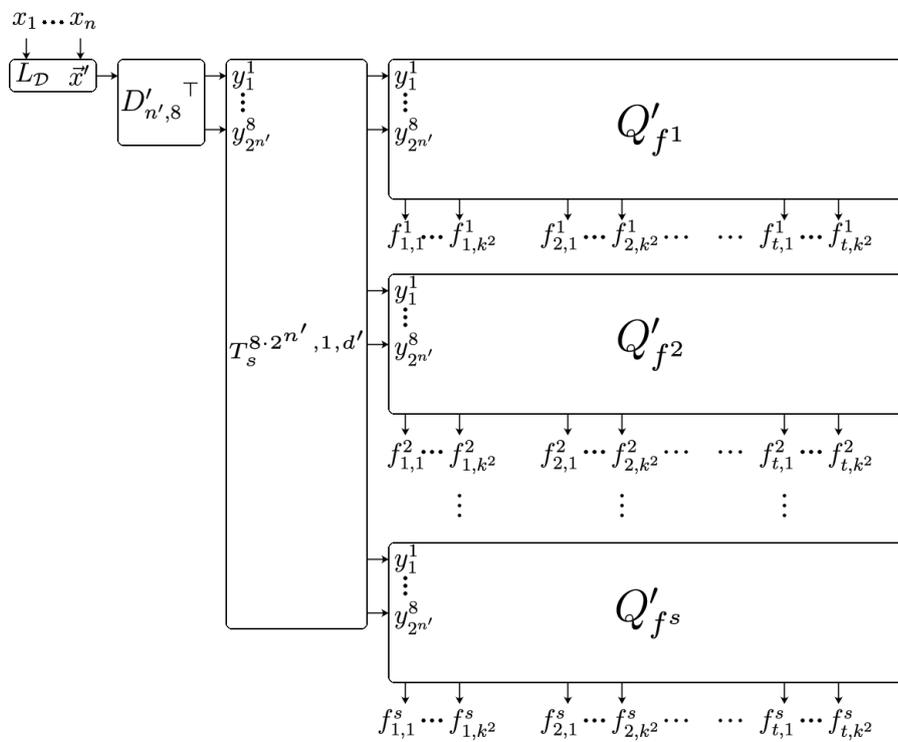


Рис. 19.

## Список литературы

- [1] Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 285–293.
- [2] Калачев Г.В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции.
- [3] Калачев Г.В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы.
- [4] Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике // М.: МГУ Мехмат, 2007.
- [5] Жуков Д.А. О вычислении частичных булевых функций клеточными схемами. // Дискретный анализ и исследование операций. Апрель – июнь 2004. Серия 1. Том 11, №2, С. 32 – 40