

О некоторых свойствах решетки пропозициональных исчислений

Г. В. Боков

В работе будут доказаны достаточные условия континуальности решетки пропозициональных исчислений с операцией подстановки и произвольными схемными операциями вывода. Кроме того будут описаны мощности множеств всех замкнутых классов, предполных и дуально-предполных классов тавтологий в решетке пропозициональных исчислений. Также будут описаны типы критерияльных систем для пропозициональных исчислений.

Ключевые слова: решетка пропозициональных исчислений, предполные классы, дуально-предполные классы, критерияльные системы.

Введение

Пропозициональное исчисление в общем виде представляет собой алгебраическую систему над множеством формул. Операциями таких систем выступают схемные операции, такие как *modus ponens*, и операция подстановки. Важным направлением в решении общей проблемы выразимости для любой алгебраической системы является описание структуры решетки ее замкнутых классов, то есть таких ее подмножеств, которые замкнуты относительно операций данной системы.

Для двузначной логики с операцией суперпозиции решетка замкнутых классов полностью описана [11]. Она имеет счетное число замкнутых классов и ее структура полностью восстанавливается из результата Поста [14]. Для k -значной логики это не верно, уже при $k \geq 3$ решетка континуальная [6]. Подобные результаты были получены и для неклассических логик, в частности, континуальную над-

решетку имеют интуиционистская логика, модальные логики, логика доказуемости [4].

В данной работе будут доказаны нетривиальные достаточные условия, которыми должны обладать операции пропозиционального исчисления, чтобы решетка замкнутых классов тавтологий была континуальная. Также будут доказаны теоремы о допустимых мощностях множества всех замкнутых классов, предполных и дуально-предполных классов тавтологий. Кроме того, будут описаны допустимые типы критериальных систем.

Основные понятия и обозначения

Далее будем придерживаться обозначений из [1, 2].

Пусть имеется некоторый счетный универсум переменных \mathcal{V} и конечное множество логических связок Σ . Строчными латинскими буквами x, y, z, p, \dots , возможно, с индексами будем обозначать переменные, а строчными латинскими буквами f, g, h, \dots , возможно, с индексами — логические связки. Обычно логическими связками являются унарная связка *отрицания* \neg и бинарные связки *конъюнкции* \wedge , *дизъюнкции* \vee , *импликация* \rightarrow .

Пусть $S \subseteq \Sigma$ — некоторое множество логических связок и $X \subseteq \mathcal{V}$ — некоторое множество переменных, тогда *пропозициональной формулой* (или для краткости просто *формулой*) над логическими связками S и множеством переменных X будем называть выражение, полученное из символов множества $S \cup X$, скобок и запятых, согласно следующему индуктивному определению:

- 1) Каждый символ переменной $x \in X$ и логической связки $f \in S$ арности 0 является формулой;
- 2) Если A_1, \dots, A_n — формулы и $f \in S$ — логическая связка арности $n \geq 1$, то выражение $f(A_1, \dots, A_n)$ является формулой.

Обозначим через $\Phi_S(X)$ множество всех формул над логическими связками S и множеством переменных X . Когда $S = \Sigma$ и $X = \mathcal{V}$ множество $\Phi_S(X)$ будем для краткости обозначать через Φ_Σ . Элементы множества Φ_Σ будем обозначать заглавными буквами A, B, C, \dots , возможно, с индексами.

Замечание. Все последующие операции на формулах будут определены так, чтобы они были инвариантными относительно переименования переменных в формулах без отождествления. Это означает, что вместе с данной выводимой формулой всегда будут выводимы формулы, которые получаются из нее переименованием переменных без отождествления. Назовем такие формулы *эквивалентными*. Поскольку исходное множество переменных \mathcal{V} счетное, то каждая формула имеет счетное число эквивалентных ей формул. Формула, полученная из данной переименованием переменных без отождествления, всегда из нее будет выводиться и наоборот, поэтому далее будем предполагать, что мы работаем не с конкретной формулой, а с целым классом формул, эквивалентных данной.

Под равенством формул из $\Phi_S(X)$ будем понимать синтаксическое совпадение соответствующих слов в алфавите $S \cup X$. Равенство формул $A, B \in \Phi_\Sigma$ будем обозначать через $A \equiv B$.

Будем говорить, что формула $A \in \Phi_\Sigma$ зависит от переменной $x \in \mathcal{V}$, если x является подформулой в A . Зависимость формулы A от переменной x обозначим через $A(x)$, зависимость от переменных x_1, \dots, x_n — через $A(x_1, \dots, x_n)$.

Введем на множестве формул Φ_Σ отношение \leq . Пусть $A \in \Phi_\Sigma(\{x_1, \dots, x_n\})$ и $B \in \Phi_\Sigma$, тогда положим

$$A \leq B \Leftrightarrow \exists C_1, \dots, C_n \in \Phi_\Sigma (A(C_1, \dots, C_n) \equiv B).$$

Формулы $A, B \in \Phi_\Sigma(\{x_1, \dots, x_n\})$ будем называть *совместными* и писать $A \simeq B$, если существуют такие $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_n \in \Phi_\Sigma$, что

$$A(C_1, \dots, C_n) \equiv B(D_1, \dots, D_n).$$

Всякое отображение $\varphi: \Sigma \rightarrow P_k$ множества логических связок Σ в множество функций k -значной логики будем называть *k -значной интерпретацией* или просто *интерпретацией*.

Каждой формуле $F \in \Phi_\Sigma$ в интерпретации φ можно однозначно сопоставить некоторую функцию из $[\varphi(\Sigma) \cup \{x\}]$ [10], где $x \in P_k$ — тождественная функция. Она определяется по индукции согласно определению формулы. Каждая переменная задает тождественную функцию из P_k , которую будем обозначать тем же символом; если формулам A_1, \dots, A_m уже сопоставлены функции f_1, \dots, f_m ,

то формуле $f(A_1, \dots, A_m)$ сопоставим функцию g равную функции $f(f_1, \dots, f_m)$. Итак, каждой формуле F из Φ_Σ в интерпретации φ можно сопоставить функцию из P_k , которую будем обозначать через φ_F . В этом случае будем говорить, что формула F выражает функцию φ_F .

Будем предполагать, что имеет *стандартная* (или *классическая*) *интерпретация* логических связок в множестве функций двузначной логики, в которой, например, связкам \neg , \wedge , \vee и \rightarrow соответствуют функции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации соответственно. Будем предполагать, если не оговорено противного, что сопоставление формуле функции всегда происходит в стандартной интерпретации. При этом функцию, соответствующую формуле F в стандартной интерпретации, будем обозначать через f_F .

Формулу F из Φ_Σ будем называть *тавтологией* или тождественно истинной в классическом смысле, если $f_F(i_1, \dots, i_m) = 1$, при любых значениях i_1, \dots, i_m из E_2 , где m — это арность функции f_F . Обозначим через Th множество всех тавтологий в Φ_Σ :

$$\text{Th} = \{F \in \Phi_\Sigma \mid f_F \equiv 1\}.$$

Пусть $S \subseteq \Sigma$ — некоторое множество логических связок и $X \subseteq \mathcal{V}$ — некоторое множество переменных, тогда *пропозициональной операцией* (или *схемной операцией*) над логическими связками S и множеством переменных X будем называть всякий конечный набор формул $\langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$, для некоторых формул $F_0, F_1, \dots, F_m \in \Phi_S(X)$ и $m \geq 0$.

Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то набор $\langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$ задает m -местную операцию $\omega : \Phi_\Sigma^m \rightarrow \Phi_\Sigma$, определенную следующим образом:

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_0 \iff \exists x_1, \dots, x_n \in \Phi_\Sigma \left(\bigwedge_{i=1}^m \xi_i \equiv F_i(x_1, \dots, x_n) \right),$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m \in \Phi_\Sigma$. Обозначим правую часть условия через $P_\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$, тогда операцию ω можно записать в виде λ -функции [9]:

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_m) = \lambda_{\xi_1, \dots, \xi_m} (\xi_0 \mid P_\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)).$$

Следуя [3], такие операции будем также обозначать в виде схемы:

$$\frac{F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)}{F_0(x_1, \dots, x_n)}.$$

Множество всех таких операций над логическими связками $S \subseteq \Sigma$ и множеством переменных $X \subseteq \mathcal{V}$ будем обозначать через $\mathcal{O}_S(X)$. Когда $S = \Sigma$ и $X = \mathcal{V}$ множество $\mathcal{O}_S(X)$ будем для краткости обозначать через \mathcal{O}_Σ . Элементы множества \mathcal{O}_Σ будем обозначать строчной греческой буквой ω , а множества элементом из \mathcal{O}_Σ — заглавной греческой буквой Ω , возможно, с индексами.

Следует сделать замечание по поводу названия таких операций. Хотя и название пропозициональные операции не встречается в литературе, тем не менее, ни одно расширенное пропозициональное исчисление не обходится без рассмотрения таких операций. По большому счету такие операции либо никак не называются, либо их принято называть схемными правилами вывода [12]. Иногда такие операции называют пропозициональными [8] или правилами Фреге [13].

Классическим примером пропозициональной операции является операция *modus ponens*:

$$\frac{x_1, x_1 \rightarrow x_2}{x_2}.$$

Нас будут интересовать не все пропозициональные операции, а лишь те $\omega \in \mathcal{O}_\Sigma$, которые тавтологии переводят в тавтологии. Такие операции назовем *допустимыми* [7] на Th. Множество всех допустимых на Th операций обозначим через \mathcal{O}_{Th} .

Кроме того, определим на множестве Th операцию подстановки. Пусть A — тавтология, содержащая переменное высказывание x , а B — произвольная формула из Φ_Σ . Тогда, если заменить в A все вхождения x на B , то полученная формула $A(B)$ тоже будет тавтологией. В этом случае будем говорить, что из A выводима $A(B)$. Операцию будем записывать в виде схемы:

$$\frac{A(x)}{A(y)}.$$

Данную операцию можно опустить, если предполагать, что каждая тавтология задает не одну, а множество формул, получающихся из данной применением операции подстановки к всевозможным переменным данной тавтологии. Пользуясь свойством перестановочности операции подстановки относительно любой пропозициональной операции, далее будем иногда опускать явное применение операции подстановки.

Множество тавтологий Th и множество допустимых операций Ω образуют алгебраическую систему (Th, Ω) , которую будем называть *пропозициональным исчислением*. Пусть $\Omega \subseteq \mathcal{O}_{\text{Th}}$ — произвольное множество допустимых на Th пропозициональных операций, тогда на Th можно определить оператор замыкания, порожденный операциями из Ω [5]. Этот оператор будем обозначать через $[\cdot]_{\Omega}$ или просто через $[\cdot]$, когда множество Ω фиксировано.

Несложно проверить, что для любого множества пропозициональных операций $\Omega \subseteq \mathcal{O}_{\Sigma}$ оператор $[\cdot]_{\Omega}$ является алгебраическим оператором замыкания [5].

Множество тавтологий $M \subseteq \text{Th}$ называется замкнутым относительно множества операций Ω , если $[M]_{\Omega} = M$ и полным, если $[M]_{\Omega} = \text{Th}$. Для произвольного $M \subseteq \text{Th}$ и $A \in \text{Th}$ формулу $A \in [M]_{\Omega}$ назовем выводимой из множества формул M и будем обозначать это через $M \vdash_{\Omega} A$ или просто через $M \vdash A$, если множество Ω фиксировано.

Для произвольного множества тавтологий $M \subseteq \text{Th}$ и произвольного множества допустимых пропозициональных операций $\Omega \subseteq \mathcal{O}_{\text{Th}}$ обозначим через $\langle M \rangle_{\Omega}$ множество состоящее из тавтологий множества M , из тавтологий A , для которых существует такая операция $\omega \in \Omega$ и такие формулы $B_1, \dots, B_m \in M$, что $\omega(B_1, \dots, B_m) = A$, а также из тавтологий A , для которых существуют такая формула $B \in M$ и подстановка $\sigma \in R_{\Sigma}$, что $A = \sigma B$. Если множество операций Ω фиксировано, то будем писать $\langle M \rangle$ вместо $\langle M \rangle_{\Omega}$. Положим $\langle M \rangle_{\Omega}^0 = M$ и $\langle M \rangle_{\Omega}^{l+1} = \langle \langle M \rangle_{\Omega}^l \rangle_{\Omega}$, тогда не сложно убедиться, что

$$[M]_{\Omega} = \bigcup_{l \geq 0} \langle M \rangle_{\Omega}^l.$$

Параметр l при этом играет роль длины вывода.

Замкнутые классы тавтологий

Определим на множестве \mathcal{O}_{Σ} операцию суперпозиции, которая состоит из элементарных операций над элементами множества \mathcal{O}_{Σ} : переименование и отождествление переменных, добавление и изъятие несущественных переменных, подстановка одной операции в другую, сужение.

Переименование и отождествление переменных Пусть $\omega, \omega' \in \mathcal{O}_\Sigma$, причем

$$\begin{aligned}\omega(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_0 &\Leftrightarrow \lambda_{\xi_1, \dots, \xi_m}(\xi_0 \mid P_\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)) \\ \omega'(\eta_1, \dots, \eta_m) = \eta_0 &\Leftrightarrow \lambda_{\eta_1, \dots, \eta_m}(\eta_0 \mid P_{\omega'}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m))\end{aligned}$$

Будем говорить, что операция ω' получена из операции ω с помощью переименования переменных, если выполнено

$$P_{\omega'}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m) = P_\omega(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m)$$

для любых $\eta_i \in \text{Th}$.

Добавление несущественных переменных Пусть $\omega, \omega' \in \mathcal{O}_\Sigma$, причем

$$\begin{aligned}\omega(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_0 &\Leftrightarrow \lambda_{\xi_1, \dots, \xi_m}(\xi_0 \mid P_\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)) \\ \omega'(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n) = \xi_0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n}(\xi_0 \mid P_{\omega'}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n))\end{aligned}$$

Будем говорить, что операция ω' получена из операции ω с помощью добавления несущественных переменных η_1, \dots, η_n , если выполнено

$$P_{\omega'}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n) = P_\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$$

для любых $\xi_i, \eta_j \in \text{Th}$.

Изяятие несущественных переменных Пусть $\omega, \omega' \in \mathcal{O}_\Sigma$, причем

$$\begin{aligned}\omega(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n) = \xi_0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n}(\xi_0 \mid P_\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)) \\ \omega'(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_0 &\Leftrightarrow \lambda_{\xi_1, \dots, \xi_m}(\xi_0 \mid P_{\omega'}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m))\end{aligned}$$

Будем говорить, что операция ω' получена из операции ω с помощью изъятия несущественных переменных η_1, \dots, η_n , если выполнено

$$P_{\omega'}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) = P_\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)$$

для любых $\xi_i, \eta_j \in \text{Th}$.

Подстановка одной операции в другую Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega \in \mathcal{O}_\Sigma$, причем

$$\begin{aligned}\omega_1(\xi_1, \dots, \xi_m) &= \xi_0 \Leftrightarrow \lambda_{\xi_1, \dots, \xi_m}(\xi_0 \mid P_{\omega_1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)) \\ \omega_2(\eta_1, \dots, \eta_n) &= \eta_0 \Leftrightarrow \lambda_{\eta_1, \dots, \eta_n}(\eta_0 \mid P_{\omega_2}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)) \\ \omega(\zeta_1, \dots, \zeta_{m+n-1}) &= \zeta_0 \Leftrightarrow \lambda_{\zeta_1, \dots, \zeta_{m+n-1}}(\zeta_0 \mid P_\omega(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{m+n-1}))\end{aligned}$$

где

$$\zeta_j = \begin{cases} \xi_j, & \text{если } 0 \leq j \leq i-1, \\ \eta_{j-i+1}, & \text{если } i \leq j \leq i+m-1, \\ \xi_{j-m+1}, & \text{если } i+m \leq j \leq m+n-1. \end{cases}$$

Будем говорить, что операция ω получена из операций ω_1 и ω_2 с помощью подстановки, если $P_\omega(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{m+n-1})$ — это предикат

$$\begin{aligned}\exists x \in \Phi_\Sigma(P_{\omega_1}(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}, x, \zeta_{i+m}, \dots, \zeta_{m+n-1}) \wedge \\ \wedge P_{\omega_2}(x, \zeta_i, \dots, \zeta_{i+m-1})).\end{aligned}$$

Сужение Пусть $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle \in \mathcal{O}_\Sigma(X)$, $\omega' = \langle G_1, \dots, G_m; G_0 \rangle \in \mathcal{O}_\Sigma$ и $\sigma: X \rightarrow \Phi_\Sigma$ — некоторая подстановка. Будем говорить, что операция ω' получена из операций ω сужением с помощью подстановки σ , если выполнено

$$G_i \equiv \sigma F_i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Множество всех операций в \mathcal{O}_Σ , полученных из операций множества $\Omega \subseteq \mathcal{O}_\Sigma$ с помощью суперпозиции, обозначим через $[\Omega]$. Несложно проверить, что $[\Omega]$ является оператором замыкания на \mathcal{O}_Σ .

Пусть (Th, Ω) — некоторое пропозициональное исчисление. Рассмотрим решетку замкнутых классов тавтологий, образованную отношением включения \subseteq множеств. Следующая теорема показывает, что определенное выше отношение \simeq совместности формул оказывает существенное влияние на структуру и размеры решетки замкнутых классов тавтологий.

Теорема 1. *Для любого конечного множества логических связей $\Sigma \subseteq P_2$ и произвольного множества допустимых на Th операций $\Omega \subseteq \mathcal{O}_{\text{Th}}$, если найдется такая тавтология $A \in \text{Th}$, что для любой операции $\omega \in [\Omega]$, где $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$, найдется такое $i \in \overline{m}$,*

что $F_i \not\equiv A$, то решетка замкнутых классов исчисления (Th, Ω) континуальная.

Доказательство. Поскольку множество всех тавтологий Th счетно, то замкнутых подмножеств не более, чем континуум. Покажем, что мощность множества замкнутых классов не менее, чем континуум.

Пусть нашлась тавтология $A \in \text{Th}$ из условия теоремы. Рассмотрим произвольную формулу $D \in \Phi_\Sigma(\{y_1, y_2\})$ от двух переменных. Обозначим через B формулу $A(D, \dots, D)$, которая получена из формулы A подстановкой вместо всех переменных формулы D . Положим для $i \geq 1$

$$C_i = \underbrace{B(x, B(x, \dots, B(x, x)))}_i.$$

Поскольку $A \in \text{Th}$, то $C_i \in \text{Th}$ для любого $i \geq 1$. Кроме того, ни одна тавтология C_i не может быть выведена из тавтологий с индексом, отличным от i , с помощью операции подстановки.

Рассмотрим множество $M = \{C_i \mid i \geq 1\}$. Покажем, что $C_k \notin [M \setminus \{C_k\}]$ для любого $k \geq 1$. Предположим противное, то есть нашлось такие k , что $C_k \in [M \setminus \{C_k\}]$. Значит, существует такая операция $\omega \in [\Omega]$, что $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$, $F_0 = C_k$ и F_i — подстановочный вариант формулы из $M \setminus \{C_k\}$ для каждого $i \in \overline{m}$. Тогда $A \simeq F_i$ для любого i , что противоречит выбору тавтологии A . Следовательно, множество M обладает тем свойством, что разным его подмножествам соответствуют разные замкнутые классы, их содержащие. Так как множество M имеет континуум подмножеств, то мощность множества замкнутых классов не менее, чем континуум. Теорема доказана.

Если наложить некоторые ограничения, на используемые операции вывода, то достаточные условия из предыдущей теоремы можно сформулировать в более простой форме.

Следствие 1. Для любого конечного множества логических связей $\Sigma \subseteq P_2$ и произвольного множества допустимых на Th операций $\Omega \subseteq O_{\text{Th}}$, если Ω не содержит констант и найдется такая тавтология $A \in \text{Th}$, что для любой операции $\omega \in \Omega$, где $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$, найдется такое $i \in \overline{m}$, что $F_i \not\equiv A$, то решетка замкнутых классов исчисления (Th, Ω) континуальная.

Доказательство. Пусть тавтология A из условия следствия нашлась. Покажем, что для любой операции $\omega \in [\Omega]$, где $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$, найдется такое $i \in \overline{m}$, что $F_i \not\leq A$, тогда согласно теореме 1 следствие будет доказано.

Доказывать будем индукцией по числу l элементарных операций, необходимых для получения ω из Ω с помощью суперпозиции. Если $l = 0$, то $\omega \in \Omega$ и утверждение верно. Пусть утверждение верно для всех $l' < l$, докажем его для l . Если ω получена из ω' с помощью переименования и отождествления переменных, добавления или изъятия несущественных переменных, либо с помощью сужения, то утверждение остается верным. Пусть ω получена из $\omega', \omega_1, \dots, \omega_{m'}$ с помощью подстановки, то есть $\omega = \omega'(\omega_1, \dots, \omega_{m'})$. Пусть $\omega' = \langle F'_1, \dots, F'_{m'}; F'_0 \rangle$ и $\omega_i = \langle F_1^i, \dots, F_{m_i}^i; F_i' \rangle$, $i = 1, \dots, m'$, тогда по предположению индукции для каждого $i \in \overline{m'}$ найдется такое $j \in \overline{m_i}$, что $F_j^i \not\leq A$. Но, тогда и для $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$ найдется такое $i \in \overline{m}$, что $F_i \not\leq A$, поскольку $\{F_i \mid i \in \overline{m}\} \subseteq \{F_j^i \mid i \in \overline{m'}, j \in \overline{m_i}\}$. Следствие доказано.

Следующая теорема описывает допустимые мощности множества всех замкнутых классов тавтологий.

Теорема 2 (Размеры решетки замкнутых классов). *Существует такое множество логических связок $\Sigma \subseteq P_2$ и множество допустимых на Th операций $\Omega \subseteq O_{\text{Th}}$, что исчисление (Th, Ω) имеет конечную, счетную и континуальную мощность решетки замкнутых классов тавтологий соответственно.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow\}$.

Для получения конечной решетки достаточно взять в качестве Ω константные операции $\omega = \langle ; A \rangle$, для каждого $A \in M$, где $M \subseteq \text{Th}$ и $|\text{Th} \setminus M| < \infty$. В этом случае решетка замкнутых классов тавтологий содержит не более чем $2^{|\text{Th} \setminus M|}$ классов.

Для получения счетной решетки достаточно взять в качестве Ω константные операции $\omega = \langle ; A \rangle$, для каждого $A \in M$, где $M \subseteq \text{Th}$ и множество $\text{Th} \setminus M$ состоит из счетного множества тавтологий $\{A_1, A, \dots\}$, для которого формулы A_i образуют цепь

$$A_1 \leq A_2 \leq \dots$$

причем тавтология A_1 является минимальным элементом в Th относительно отношения \leq , а тавтология A_{i+1} является минимальным

элементом в множестве $\{B \in \text{Th} \mid A_i \leq B \text{ и } A_i \neq B\}$ относительно отношения \leq для всех $i \geq 1$. В этом случае решетка замкнутых классов тавтологий состоит из счетного семейства попарно вложенных друг в друга классов

$$[A_1] \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq [\emptyset].$$

Для получения континуальной решетки возьмем в качестве Ω — множество, состоящее из единственной операции *modus ponens*. Тогда, согласно следствию 1 решетка замкнутых классов тавтологий континуальная. Теорема доказана.

Предполные классы тавтологий

Рассмотрим исчисление (Th, Ω) , где Ω — некоторое множество допустимых операций. Замкнутое множество тавтологий $M \subseteq \text{Th}$ будем называть предполным в Th , если $[M]_{\Omega} \neq \text{Th}$, но при добавлении к M любой тавтологии из множества $\text{Th} \setminus M$, получается полная система.

Следующая теорема иллюстрирует, что наряду с замкнутыми классами для предполных классов также существуют исчисления, покрывающие все возможные значения размеров системы предполных классов.

Теорема 3 (Число предполных классов). *Существует такое множество логических связок $\Sigma \subseteq P_2$ и множество допустимых на Th операций $\Omega \subseteq O_{\text{Th}}$, что исчисление (Th, Ω) не имеет предполных классов тавтологий, имеет конечное, счетное и континуальное множество предполных классов тавтологий соответственно.*

Отсутствие предполных классов

Рассмотрим произвольное множество логических связок $\Sigma \subseteq P_2$, из которых выразима импликация \rightarrow . Обозначим формулу, выражающую эту функцию через $x \rightarrow y$. Операцию, заданную схемой:

$$\frac{x, x \rightarrow y}{y}$$

обозначим через ω_{mp} и назовем обобщенной операцией *modus ponens*.

В [1] доказано, что исчисление $(\text{Th}, \{\omega_{mp}\})$ конечно-порождено, поэтому найдутся такие тавтологии $A_1, \dots, A_m \in \text{Th}$, что

$[\{A_1, \dots, A_m\}]_{\{\omega_{mp}\}} = \text{Th}$. Положим в качестве Ω следующее множество операций:

$$\Omega = \{\omega_{mp}\} \cup \{\langle ; A_1 \rangle, \dots, \langle ; A_m \rangle\}.$$

Тогда для исчисления (Th, Ω) верна следующая лемма.

Лемма 1. *Исчисление (Th, Ω) не имеет предполных классов.*

Доказательство. В самом деле, в замыкании любого множества тавтологий содержится система $\{A_1, \dots, A_m\}$. Поскольку данная система полна, то и замыкание любого множества совпадает с Th . Следовательно, решетка замкнутых классов состоит из единственного класса Th и предполных классов нет. Лемма доказана.

Конечная система предполных классов

Рассмотрим конечное множество тавтологий $M \subseteq \text{Th}$, состоящее из попарно не совместных элементов A_1, \dots, A_m минимальных относительно \leq , то есть для любых $1 \leq i < j \leq m$ выполнено $A_i \not\leq A_j$ и ни для какого $i = 1, \dots, m$ не существует такой тавтологии B , что $B \leq A_i$. Обозначим через M множество операций:

$$\Omega_M = \{\omega \in \mathcal{O}_{\text{Th}} \mid \exists A \in \text{Th} \setminus M: \omega = \langle ; A \rangle\}.$$

Для данного множества операций верна следующая лемма.

Лемма 2. *Множество предполных классов исчисления (Th, Ω_M) конечно.*

Доказательство. Замыкание пустого множества совпадает с множеством $\text{Th} \setminus M$. Поскольку множество M конечно, то существует лишь конечное число замкнутых классов. Каждый замкнутый класс однозначно задается подмножеством множества M . Следовательно, предполных классов также конечное число. Лемма доказана.

Счетная система предполных классов

Операцию $\omega \in \mathcal{O}_\Sigma$, где $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$ и $F_i \in \Phi_\Sigma$, $i = 0, 1, \dots, m$, назовем селекторной, если существует такое $i \in \{1, \dots, m\}$, для которого $F_i \equiv F_0$.

Лемма 3. *Для любого множества $\Omega \subseteq O_{\text{Th}}$ селекторных операций, исчисление (Th, Ω) имеет счетное число предполных классов тогда и только тогда, когда множество тавтологий Th имеет счетное число минимальных относительно \leq элементов.*

Доказательство. Поскольку для любой селекторной операции $\omega = \langle F_1, \dots, F_m; F_0 \rangle$ существует такое $i \in \{1, \dots, m\}$, для которого $F_i \equiv F_0$, то замыкание любого множества $M \subseteq \text{Th}$ состоит из тех и только тех тавтологий A , для которых существует такая тавтология $B \in M$, что $B \leq A$. Тогда предполными классами в (Th, Ω) будут являться только такие замкнутые классы тавтологий M , для которых дополнение $\text{Th} \setminus M$ состоит из единственной тавтологии, являющейся минимальным элементом относительно \leq .

Тогда, если множество тавтологий Th имеет счетное число минимальных относительно \leq элементов, то и множество предполных классов также счетно, если же Th имеет конечное число минимальных элементов, то предполных классов конечно. Лемма доказана.

Континуальная система предполных классов

Рассмотрим произвольное множество логических связок $\Sigma \subseteq P_2$, из которых выразима импликация \rightarrow . Для исчисления $(\text{Th}, \{\omega_{\text{mp}}\})$ верна следующая лемма.

Лемма 4. *Множество предполных классов исчисления $(\text{Th}, \{\omega_{\text{mp}}\})$ имеет мощность континуума.*

Доказательство. Рассмотрим множество тавтологий $M = \{A_i \mid i \geq 0\}$, где

$$A_0 = x \rightarrow x,$$

$$A_i = A_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow (A_0 \rightarrow (x_i \rightarrow \dots \rightarrow (x_1 \rightarrow A_0))), \quad i \geq 1.$$

Покажем, что для любого $i \geq 0$ тавтология A_i не выразима через остальные формулы системы M . Предположим противное, то есть нашлось такое $i \geq 0$, что A_i выводима из $M \setminus \{A_i\}$. Рассмотрим наименьший вывод Γ этой формулы. Поскольку A_i содержится в посылках каждой тавтологии $A_{i'}$, $i' > i$, то формулы $A_{i'}$ для $i' > i$ не участвуют в выводе Γ . Далее, каждая формула $A_{i'}$ для $i' < i$ имеет не более $2i$ групп посылок, а операция подстановки и обобщенная

операция *modus ponens*, будучи примененные к тавтологиям данного вида, не могут привести к формуле того же вида, число групп посылок которой превосходит $2i$. Но тавтология A_i имеет $2i + 1$ группу посылок, получили противоречие. Из доказанного следует, что для любых $M_1, M_2 \subseteq M$, $M_1 \neq M_2$, следует, что $[M_1]_{\{\omega_{mp}\}} \neq [M_2]_{\{\omega_{mp}\}}$.

Пусть $Q \subseteq M$, определим

$$Q' = \{A \rightarrow B \mid A \in M \setminus Q, B \in \text{Th}\},$$

$$\tilde{Q} = Q \cup Q'.$$

Как известно [5], если для алгебраического оператора замыкания J , определенного на подмножествах некоторого множества T , существуют конечные J -полные системы, то каждый собственный, то есть не совпадающий с T , замкнутый класс содержится в некотором предполном классе. Поскольку $[\cdot]_{\{\omega_{mp}\}}$ является алгебраическим оператором замыкания и согласно [1] множество Th конечно-порождено относительно обобщенной операции *modus ponens*, то для каждого $Q \subseteq M$ множество \tilde{Q} содержится в некотором предполном классе Π . Покажем, что для любых $Q_1, Q_2 \subseteq M$ таких, что $Q_1 \neq Q_2$, следует $\Pi_1 \neq \Pi_2$, где Π_1 и Π_2 — предполные классы, соответствующие \tilde{Q}_1 и \tilde{Q}_2 .

В самом деле, для любой тавтологии $A \in Q_1$ и $A \notin Q_2$ выполнено $A \in \Pi_1$. Допустим, что $A \in \Pi_2$, тогда $[\Pi_2 \cup \{A\}]_{\{\omega_{mp}\}} \neq \text{Th}$. С другой стороны, $A \notin Q_2$, следовательно, $A \in M \setminus M_2$ и $A \rightarrow B \in \tilde{Q}_2$ для любой формулы $B \in \text{Th}$. Откуда непосредственно следует, что $A \rightarrow B \in \Pi_2$. Поэтому, если добавить к Π_2 тавтологию A , то с помощью обобщенной операции *modus ponens* можно получить все тавтологии из Th , то есть $[\Pi_2 \cup \{A\}]_{\{\omega_{mp}\}} = \text{Th}$. Из противоречия следует, что $\Pi_1 \neq \Pi_2$.

Поскольку, множество M имеет континуальное семейство подмножеств и разным подмножествам соответствуют разные предполные классы, то множество всех предполных классов имеет мощность континуума. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3

Существование исчисления, которое не имеет предполных классов следует из леммы 1, существование исчисления с конечным числом

предполных классов следует из леммы 2, счетного — из леммы 3 и континуального — из леммы 4.

Дуально-предполные классы тавтологий

Замкнутый класс тавтологий $Q \subseteq \text{Th}$ называется дуально-предполным, если он не пуст, замкнут и любой непустой замкнутый подкласс в Q совпадает с самим Q .

Рассмотрим произвольное множество логических связок $\Sigma \subseteq P_2$, из которых выразима импликация \rightarrow . Для исчисления $(\text{Th}, \{\omega_{mp}\})$ верна следующая теорема.

Теорема 4. *Исчисление $(\text{Th}, \{\omega_{mp}\})$ не имеет дуально-предполных классов.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $Q \subseteq \text{Th}$ — дуально-предполный класс. Если найдутся такие тавтологии $A, B \in Q$, что одна из них не выводима из другой, например, B не выводима из A , то $[\{A\}]_{\{\omega_{mp}\}} \subsetneq Q$, что противоречит определению дуально-предполного класса. Следовательно, для любых тавтологий $A, B \in Q$ выполнено:

$$A \in [\{B\}]_{\{\omega_{mp}\}} \text{ и } B \in [\{A\}]_{\{\omega_{mp}\}}.$$

Так как Q — непустой класс, то существует хотя бы одна тавтология $A \in Q$. Рассмотрим переменное высказывание x , которое входит в A и обладает свойством: если рассматривать формулу A как дерево, внутренним вершинам которого приписаны логические связки, а листьям — переменные высказывания, то x — это переменное высказывание, приписанное крайнему правому листу.

Рассмотрим тавтологию $A' \in Q$, получающуюся из A путем подстановки вместо переменного высказывания x тавтологии $A \wedge A$. Покажем, что $A \notin [\{A'\}]_{\{\omega_{mp}\}}$. Для этого индукцией по длине вывода l докажем, что в любой тавтологии $B \in [\{A'\}]_{\{\omega_{mp}\}}$ можно выделить подформулу вида $\sigma(A \wedge A)$, где σ — некоторая подстановка. Причем, если B содержит подформулу $\sigma(A \wedge A)$, дерево, соответствующее последней формуле, является крайним правым поддеревом в дереве, соответствующем формуле B .

База индукции ($l = 0$): Тавтология A' удовлетворяет данному требованию по построению.

Шаг индукции ($l \rightarrow l + 1$): Пусть индуктивное предположение верно для всех тавтологий из M_l , где $M_0 = \{A'\}$ и $M_{k+1} = \langle M_k \rangle_{\{\omega_{mp}\}}$. Докажем его для M_{l+1} .

- 1 Пусть C получено из тавтологий $B, B \rightarrow C \in M_l$ путем применения обобщенной операции *modus ponens*. Тогда в дереве, соответствующем формуле $B \rightarrow C$, любое крайнее правое поддерево является одновременно крайним правым поддеревом в дереве, соответствующем формуле C . Следовательно, C содержит подформулу вида $\sigma(A \wedge A)$.
- 2 Пусть C получено из тавтологии $B \in M_l$ путем применения правила подстановки (обозначим эту подстановку через σ'), тогда, если B содержит подформулу вида $\sigma(A \wedge A)$, то C содержит подформулу вида $\sigma''(A \wedge A)$, где $\sigma'' = \sigma' \circ \sigma$.

Поскольку в A нет подформулы вида $\sigma(A \wedge A)$, то $A \notin \{\{A'\}\}_{\{\omega_{mp}\}}$. Следовательно, верно утверждение теоремы.

Критериальные системы

Напомним понятием критериальной системы. Пусть $\Delta(M)$ — совокупность всех замкнутых подмножеств множества M . Поскольку $[M] = M$, то $\Delta(M)$ не пуста. Критериальной системой называется произвольное подмножество $\Theta \subseteq \Delta(M)$, обладающее свойством: всякое множество $M' \subseteq M$ является полным тогда и только тогда, когда для любого элемента $Q \in \Theta$ выполнено соотношение $M \not\subseteq Q$.

Для применения критериальной системы при исследовании множеств на полноту, хотелось бы, чтобы она в некотором роде была минимальной. Это объясняется тем, что если Θ — критериальная система и в ней найдутся такие элементы Q_1 и Q_2 , что $Q_1 \subseteq Q_2$, то множество $\Theta \setminus \{Q_1\}$ также будет критериальной системой. Нетрудно убедиться, что если Θ — критериальная система, то каждый предполный класс содержится в Θ . Если через Π обозначить множество предполных классов, то под избыточностью критериальной системы Θ можно считать представление ее в виде $\Theta = \Pi \cup \Xi$, где во второе слагаемое Ξ входят только такие замкнутые классы из Θ , которые не являются подмножествами ни одного из предполных классов. Далее будем под критериальной системой понимать избыточную критериальную систему.

Поскольку понятие критериальной системы тесно связано с понятием предполного класса, для пропозициональных исчислений верна теорема.

Теорема 5 (Мощность критериальной системы). *Существует такое множество логических связей $\Sigma \subseteq P_2$ и множество допустимых на Th операций $\Omega \subseteq O_{\text{Th}}$, что исчисление (Th, Ω) не имеет критериальной системы, имеет конечную, счетную и континуальную критериальную систему соответственно.*

Доказательство. Существование исчисления без критериальной системы следует из леммы 1.

Поскольку в лемме 2 решетка замкнутых классов конечна, то критериальная система состоит только из предполных классов, поэтому она конечна.

В лемме 3 из-за свойств селекторных операций следует, что каждый замкнутый класс содержится в некотором предполном классе, поэтому критериальная система также состоит только из предполных классов. Поскольку предполных классов счетное число, то критериальная система также счетная.

Поскольку оператор замыкания в лемме 4 является алгебраическим и полученное исчисление конечно-порождено согласно [1], то каждый замкнутый класс содержится в некотором предполном классе [5], поэтому критериальная система также состоит только из предполных классов, а последних, согласно лемме, континуальное число, поэтому критериальная система континуальная. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Боков Г. В. Критерий конечной порожденности пропозициональных исчислений // Дискрет. матем. — 2013. Т. 25, вып. 3. — С. 63–81.
- [2] Боков Г. В. Об алгоритмической неразрешимости проблемы выразимости пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. — 2013. Т. 17, вып. 1–4. — С. 271–292.
- [3] Гильберт Д., Бернайс П. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1979.

- [4] Горбунов И. А., Рыбаков М. Н. Континуальные семейства логик // Логические исследования. — 2007. Т. 14. — С. 131–151.
- [5] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
- [6] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
- [7] Минц Г. Е. Допустимые и производные правила // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. — 1968. Т. 8. — С. 189–191.
- [8] Циткин А. И. О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний // Матем. сб. — 1977. Т. 102 (144), № 2.
- [9] Шенфилд Д. Математическая логика. — М.: Наука, 1975.
- [10] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
- [11] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
- [12] Harrop R. On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1958. Vol. 54, no. 1. — P. 1–13.
- [13] Krajíček J. Bounded Arithmetic, Propositional Logic and Complexity Theory. — Cambridge University Press, 1995.
- [14] Post E. L. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions // Am. J. of Mathematics. — 1921. Vol. 43, No. 3. — P. 163–185.