

Оценка числа шагов алгоритма Новикова

С. А. Комков

В работе представлен алгоритм построения множества по заданным параметрам, для которого фактическое число шагов достигает половины верхней оценки числа шагов для данного множества в теореме Новикова. Дополнительно доказывается, что для множества, состоящего из двух точек, фактическое число шагов не более чем $\frac{D^2}{2r^2} + 2$.

Ключевые слова: нейронные сети, теорема Новикова.

Рассмотрим конечное упорядоченное множество точек на плоскости $X = \{(x_0; y_0); \dots; (x_{k-1}; y_{k-1})\}$. Пусть найдется прямая, проходящая через точку $(0; 0)$, такая, что все точки из множества X лежат строго по одну сторону от этой прямой. Алгоритм Новикова позволяет найти подобную прямую не более чем за $\frac{D^2}{r^2}$ шагов, где $D = \max_{0 \leq i \leq k-1} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ (максимальное расстояние от точки из множества X до начала координат), а $r = \min_{0 \leq i < j \leq k-1; 0 \leq t \leq 1} \sqrt{(tx_i + (1-t)x_j)^2 + (ty_i + (1-t)y_j)^2}$ (минимальное расстояние от начала координат до выпуклой оболочки множества X).

Алгоритм Новикова.¹

Инициализация:

$$\begin{cases} \bar{a}_0 = (0; 0), \\ t_0 = 0. \end{cases}$$

Пусть на m -ом шаге имеем $\bar{a}_m = (a_{m,1}; a_{m,2})$. Поочередно считаем скалярное произведение вектора \bar{a}_m на векторы $(x_{t_m}; y_{t_m})$, $(x_{t_m+1 \pmod k}; y_{t_m+1 \pmod k}), \dots, (x_{t_m+k-1 \pmod k}; y_{t_m+k-1 \pmod k})$ до

¹Здесь представлен упрощенный вид данного алгоритма.

тех пор, пока не получим неположительное число. При первом неположительном результате, полученном при скалярном умножении на вектор $(x_l; y_l)$, переходим к следующему шагу посредством:

$$\begin{cases} \overline{a_{m+1}} = \overline{a_m} + (x_l; y_l), \\ t_{m+1} = l + 1 \pmod{k}. \end{cases}$$

В случае если все скалярные произведения положительные числа, то прямая, перпендикулярная вектору $\overline{a_m}$, проходящая через точку $(0; 0)$ — искомая.

Лемма 1. При отображении $f : X \rightarrow Y$ вида $(x; y) \mapsto C(x; y)^T$ с сохранением порядка элементов множества X , где C — матрица вида:

- 1) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$,
- 2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda > 0$,
- 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

не меняется оценка количества шагов для алгоритма Новикова и не меняется фактическое число шагов.

Доказательство.

- 1) Повороты относительно начала координат не меняют расстояния до точки $(0; 0)$. Следовательно, D и r не меняются. При вращении вокруг начала координат угол между векторами, выходящими из $(0; 0)$, также не изменяется. Итак, сохраняются расстояния и скалярные произведения, используемые алгоритмом. Отсюда сохраняется ход алгоритма Новикова, то есть число фактических шагов.
- 2) Будем обозначать штрихом скаляры и вектора, соответствующие ходу алгоритма для множества Y . Имеют место равенства:

$$D' = \max_{0 \leq i \leq k-1} \sqrt{(\lambda x_i)^2 + (\lambda y_i)^2} = \lambda \max_{0 \leq i \leq k-1} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \lambda D;$$

$$\begin{aligned}
r' &= \min_{\substack{0 \leq i < j \leq k-1; \\ 0 \leq t \leq 1}} \sqrt{(\lambda t x_i + \lambda(1-t)x_j)^2 + (\lambda t y_i + \lambda(1-t)y_j)^2} = \\
&= \lambda \min_{\substack{0 \leq i < j \leq k-1; \\ 0 \leq t \leq 1}} \sqrt{(t x_i + (1-t)x_j)^2 + (t y_i + (1-t)y_j)^2} = \lambda r.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{D'^2}{r'^2} &= \frac{\lambda^2 D^2}{\lambda^2 r^2} = \frac{D^2}{r^2}; \\
\begin{cases} \overline{a'_1} = \lambda \overline{a_1} = (\lambda x_0; \lambda y_0), \\ t'_1 = t_1 = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Результат первого шага определен однозначно, так как скалярное произведение с нулевым вектором всегда равно нулю. Пусть

$$\begin{cases} \overline{a'_m} = \lambda \overline{a_m}, \\ t'_m = t_m. \end{cases}$$

Тогда для скалярных произведений:

$$\langle \overline{a'_m}; (x'_l; y'_l) \rangle = \langle \lambda \overline{a_m}; \lambda (x_l; y_l) \rangle = \lambda^2 \langle \overline{a_m}; (x_l; y_l) \rangle.$$

Итак, знак скалярного произведения будет такой же, как у соответствующего скалярного произведения в алгоритме для случая без использования преобразования f , значит ход алгоритма не меняется. Следовательно, сохраняется оценка количества шагов и фактическое число шагов.

3) Имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
D' &= \max_{0 \leq i \leq k-1} \sqrt{(-x_i)^2 + (y_i)^2} = \max_{0 \leq i \leq k-1} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = D; \\
r' &= \min_{\substack{0 \leq i < j \leq k-1; \\ 0 \leq t \leq 1}} \sqrt{(t(-x_i) + (1-t)(-x_j))^2 + (t y_i + (1-t)y_j)^2} = \\
&= \min_{\substack{0 \leq i < j \leq k-1; \\ 0 \leq t \leq 1}} \sqrt{(t x_i + (1-t)x_j)^2 + (t y_i + (1-t)y_j)^2} = r.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \frac{D'^2}{r'^2} = \frac{D^2}{r^2}, \\ \overline{a'_1} = (-x_0; y_0), \\ t'_1 = t_1 = 1. \end{cases}$$

Результат первого шага определен однозначно, так как скалярное произведение с нулевым вектором всегда равно нулю. Пусть

$$\begin{cases} \overline{a'_m} = (-a_m^1; a_m^2), \\ t'_m = t_m. \end{cases}$$

Тогда для скалярных произведений:

$$\langle \overline{a'_m}; (x'_l; y'_l) \rangle = \langle (-a_m^1; a_m^2); (-x_l; y_l) \rangle = \langle \overline{a_m}; (x_l; y_l) \rangle.$$

Итак, знак скалярного произведения будет такой же, как у соответствующего скалярного произведения в алгоритме для случая без использования преобразования f , значит ход алгоритма не меняется. Следовательно, сохраняется оценка количества шагов и фактическое число шагов.

Лемма доказана.

Теорема 1. При любых заданных D , r и b таких, что $\frac{D}{r} \geq \sqrt{10}$ и $b \geq 2$, можно построить такое множество точек на плоскости $X = \{(x_1; y_1); \dots; (x_b; y_b)\}$, что фактическое число шагов в ходе алгоритма Новикова будет не менее чем $\frac{D^2}{2r^2} - 2$.

Доказательство. Построим множество $X' = \{(n; 0); (-n; \frac{1}{n})\}$, где $n > 0$ такое, что

$$\frac{D'}{r'} = \frac{D}{r}. \quad (1)$$

Для данного множества $D' = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}}$, а $r' = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + \frac{1}{n^2}}}$. Тогда n находится из условия (1), которое эквивалентно равенству:

$$4n^4 + 5 + \frac{1}{n^4} = \frac{D^2}{r^2}.$$

Слева от знака равенства при $n \geq 1$ монотонно возрастающая, непрерывная, неограниченная функция, равная 10 при $n = 1$. Следовательно, для существования решения достаточно, чтобы выполнялось: $\frac{D}{r} \geq \sqrt{10}$. Далее будем считать, что $n \geq 1$.

Рассмотрим вектор $\overline{a'_k} = (a'_{k,1}; a'_{k,2})$. Очевидно, $a'_{k,2} \geq 0$ для любого k (так как $y'_i \geq 0$ для любого i). Далее в случае, когда $a'_{k,1} > 0$:

$$\langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (n; 0) \rangle = n a'_{k,1} > 0.$$

Следовательно, в этом случае в ходе алгоритма Новикова может быть добавлен только вектор $(-n; \frac{1}{n})$. В случае, когда $a'_{k,1} < 0$:

$$\begin{aligned} \langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (n; 0) \rangle &= n a'_{k,1} < 0; \\ \langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle &= -n a'_{k,1} + \frac{a'_{k,2}}{n} > 0. \end{aligned}$$

Итак, в этом случае $\overline{a'_{k+1}} = \overline{a'_k} + (n; 0)$. После первых двух шагов вектор определен однозначно: $\overline{a'_2} = (0; \frac{1}{n})$. Следовательно, $a'_{k,2} > 0$ для любого $k \geq 2$. Далее при $a'_{k,1} = 0$:

$$\begin{aligned} \langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (n; 0) \rangle &= 0; \\ \langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle &= \frac{a'_{k,2}}{n} > 0. \end{aligned}$$

Значит, алгоритм закончит работу только при $a'_{m,1} > 0$. Так как в случае, когда $a'_{k,1} > 0$, может быть добавлен только вектор $(-n; \frac{1}{n})$, то $a'_{m,1} = n$. Итак, окончательный вектор будет иметь вид $(n; \frac{t}{n})$, где t — количество шагов, на которых был добавлен вектор $(-n; \frac{1}{n})$. Отсюда вектор $(n; 0)$ был добавлен $t + 1$ раз. Итого всего шагов $2t + 1$. При этом должна быть верна система:

$$\begin{cases} \langle (n; \frac{t}{n}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle > 0, \\ \langle (n; \frac{t}{n}); (n; 0) \rangle > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Второе неравенство системы (2) очевидно выполняется. Рассмотрим первое неравенство:

$$\begin{aligned} \langle (n; \frac{t}{n}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle &= -n^2 + \frac{t}{n^2} > 0; \\ t &> n^4. \end{aligned}$$

Наименьшее t , при котором выполняется данное неравенство, это $t = [n^4] + 1$. Итого всего шагов $2t + 1 = 2[n^4] + 3$.

$$\begin{aligned} n &\geq 1; \\ 1 &\geq \frac{1}{n^4}; \\ 5 &\geq 4\{n^4\} + \frac{1}{n^4}; \\ 4[n^4] + 6 &\geq 4n^4 + \frac{1}{n^4} + 1; \\ 2[n^4] + 3 &\geq \frac{4n^4 + 5 + \frac{1}{n^4}}{2} - 2; \\ 2[n^4] + 3 &\geq \frac{D^2}{2r^2} - 2. \end{aligned}$$

Итак, фактическое число шагов не менее чем $\frac{D^2}{2r^2} - 2$.

В случае если $b > 2$ возьмем множество

$$X'' = \left\{ (n; 0); \left(-n; \frac{1}{n}\right); (v_{1,1}; v_{1,2}); \dots; (v_{(b-2),1}; v_{(b-2),2}) \right\},$$

где $v_{j,i} > 0$, $v_{j,2} > n^2 v_{j,1}$ и $n < \sqrt{v_{j,1}^2 + v_{j,2}^2} < \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}}$ для любых i, j . Таким образом $D'' = D'$ и $r'' = r'$. Так как

$$\begin{aligned} \langle (v_{j,1}; v_{j,2}); (n; 0) \rangle &= n v_{j,1} > 0, \\ \langle (v_{j,1}; v_{j,2}); \left(-n; \frac{1}{n}\right) \rangle &= -n v_{j,1} + \frac{v_{j,2}}{n} > -n v_{j,1} + \frac{n^2 v_{j,1}}{n} = 0, \end{aligned}$$

добавленные точки не будут влиять на ход алгоритма Новикова. То есть фактическое число шагов и оценка числа шагов будут такими же, как и для множества X' . Далее, умножив координаты точек на матрицу $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda = \frac{D}{D'}$, получим искомое множество, так как по лемме фактическое количество шагов и оценка количества шагов не изменятся при данном преобразовании. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любого множества X на плоскости, состоящего из двух точек, строго отделимых от нуля, фактическое число шагов не больше чем $\frac{D^2}{2r^2} + 2$.*

Доказательство. По лемме любое множество $X = \{(x_1; y_1); (x_2; y_2)\}$, строго отделимое от нуля, можно свести к множеству одного из трех типов:

- 1) $X' = \{(m; 0); (-k; t)\}$, либо $X' = \{(-k; t); (m; 0)\}$, где $m, k, t > 0$ и $m \geq \sqrt{k^2 + t^2}$;
- 2) $X' = \{(m; 0); (k; t)\}$, где $m, t > 0$ и $k \geq 0$;
- 3) $X' = \{(m; 0); (k; 0)\}$, где $m, k > 0$.

Разберем эти случаи отдельно:

1. В этом случае:

$$D' = m;$$

$$r' = \frac{mt}{\sqrt{t^2 + (k+m)^2}}.$$

Рассмотрим вектор $\overline{a'_s} = (a'_{s,1}; a'_{s,2})$. Очевидно, $a'_{s,2} \geq 0$ для любого s (так как $y'_i \geq 0$ для любого i). Далее в случае, когда $a'_{s,1} > 0$:

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (m; 0) \rangle = m a'_{s,1} > 0.$$

Следовательно, в этом случае в ходе алгоритма Новикова может быть добавлен только вектор $(-k; t)$. В случае, когда $a'_{s,1} < 0$:

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (m; 0) \rangle = m a'_{s,1} < 0;$$

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (-k; t) \rangle = -k a'_{s,1} + t a'_{s,2} > 0.$$

Итак, в этом случае $\overline{a'_{s+1}} = \overline{a'_s} + (m; 0)$. Так как $m \geq \sqrt{k^2 + t^2} > k$, то $a'_{(s+1),1} > 0$.

После первых двух шагов вектор одинаков для X' и X'' :

$$\overline{a'_2} = (m - k; t).$$

Следовательно, так как $m - k > 0$, то далее ход алгоритма определен однозначно для X' и X'' . Так же $a'_{s,2} > 0$ для любого $s \geq 2$. Далее при $a'_{s,1} = 0$:

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (m; 0) \rangle = 0;$$

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (-k; t) \rangle = t a'_{s,2} > 0.$$

Значит, алгоритм закончит работу только при $a'_{s,1} > 0$. По предыдущим замечаниям получается, что вектор, прибавляемый к $\overline{a'_s}$ на $s + 1$ шаге, где $s \geq 2$, определяется знаком числа $a_s^{1'}$.

Рассмотрим новый алгоритм, который добавляет вектор $(m; 0)$, если $a'_{s,1} \leq 0$, добавляет $(-k; t)$, если $a'_{s,1} > 0$. Будем считать, что фактическое число шагов работы алгоритма Новикова для рассматриваемого множества более двух. В противном же случае число шагов заведомо укладывается в желаемую оценку. Итак, начиная с третьего шага и заканчивая последним шагом алгоритма Новикова, новый алгоритм целиком совпадает с изначальным. То есть если на каком-то шаге нового алгоритма построенный вектор дает положительное скалярное произведение с векторами $(m; 0)$ и $(-k; t)$, то номер этого шага не меньше, чем фактическое число шагов алгоритма Новикова.

Пусть j — номер шага нового алгоритма, u — количество шагов, на которых был добавлен вектор $(m; 0)$, а v — количество шагов, на которых был добавлен вектор $(-k; t)$. Тогда должна быть верна система:

$$\begin{cases} \langle (u m - v k; v t); (m; 0) \rangle > 0, \\ \langle (u m - v k; v t); (-k; t) \rangle > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Найдем j , при котором эти условия могут выполняться. Рассмотрим второе неравенство системы (3):

$$\begin{aligned} \langle (u m - v k; v t); (-k; t) \rangle &> 0; \\ -k(u m - v k) + v t^2 &> 0; \\ v t^2 + u t^2 &> k(u m - v k) + u t^2; \\ j &> \frac{k(u m - v k)}{t^2} + u. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как в случае, когда $a'_{s,1} > 0$ может быть добавлен только вектор $(-k; t)$, то:

$$u m - v k \leq m; \quad (5)$$

$$u m - (j - u) k \leq m;$$

$$u(m + k) \leq m + j k;$$

$$u \leq \frac{m + j k}{m + k}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что подставив (6) в (4) можно получить оценку:

$$\begin{aligned} j &> \frac{k(u m - v k)}{t^2} + \frac{m + j k}{m + k}; \\ \frac{j(m + k) - j k}{m + k} &> \frac{k(u m - v k)}{t^2} + \frac{m}{m + k}; \\ j &> \frac{k(u m - v k)(m + k)}{t^2 m} + 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (5) в (7) дает оценку:

$$j > \frac{k(m + k)}{t^2} + 1.$$

Итак, при $j > \frac{k(m+k)}{t^2} + 1$ второе неравенство системы (3) выполнено. Как ранее было замечено, хотя бы у одного из векторов $\overline{a'_s}$ и $\overline{a'_{s+1}}$ первая координата больше нуля. Значит хотя бы один из векторов $\overline{a'_{\left[\frac{k(m+k)}{t^2}\right]+2}}$ и $\overline{a'_{\left[\frac{k(m+k)}{t^2}\right]+3}}$ полностью удовлетворяет системе (3). А значит:

$$\begin{aligned} j &\leq \left\lceil \frac{k(m+k)}{t^2} \right\rceil + 3 \leq \frac{k(m+k)}{t^2} + 3 = \frac{m k + k^2 + t^2}{t^2} + 2 = \\ &= \frac{2 m k + 2 k^2 + 2 t^2}{2 t^2} + 2 \leq \frac{2 m k + k^2 + t^2 + m^2}{2 t^2} + 2 = \\ &= \frac{(t^2 + (k + m)^2) m^2}{2 t^2 m^2} + 2 = \frac{D^2}{2 r^2} + 2. \end{aligned}$$

2. В данном случае обе точки находят в одном квадранте плоскости относительно координатных осей. Заведомо хотя бы один из векторов $\overline{a'_1}$ или $\overline{a'_2}$ не лежит на границе этого квадранта, следовательно, образует острый угол с векторами $(m; 0)$ и $(k; t)$. Отсюда оба скалярных произведения больше нуля. Итого шагов не более двух, что не больше чем $\frac{D^2}{2 r^2} + 2$.

3. В данном случае достаточно одного шага, что не больше чем $\frac{D^2}{2 r^2} + 2$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Теоремы 1 и 2 обобщаются на случай формулировки теоремы Новикова² из учебного пособия [1].

²Принципиальные отличия формулировки из [1] заключаются в том, что точки принадлежат n -мерному евклидову пространству, и каждый вектор встречается

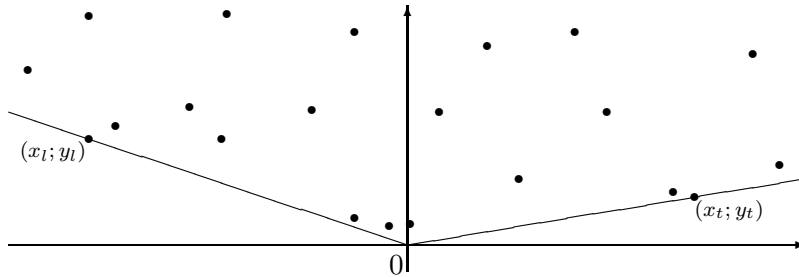
Доказательство. Для множества, построенного в теореме 1, не меняются фактическое число шагов и оценка числа шагов при каноническом вложении плоскости в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Начиная со второго шага, добавляемый вектор определен однозначно. Следовательно, порядок обучающей последовательности не влияет на количество шагов, так как шагов заведомо не меньше двух.

Любое множество в \mathbb{R}^n , состоящее из двух точек и строго отделенное от нуля, поворотами вокруг координатных осей и симметриями относительно $(n-1)$ -мерных гиперплоскостей, содержащих $(0; \dots; 0)$, сводится к множеству одного из трех видов:

- 1) $X' = \{(m; 0; 0; \dots; 0); (-k; t; 0; \dots; 0)\}$, где $m, k, t > 0$ и $m \geq \sqrt{k^2 + t^2}$;
- 2) $X' = \{(m; 0; 0; \dots; 0); (k; t; 0; \dots; 0)\}$, где $m, t > 0$ и $k \geq 0$;
- 3) $X' = \{(m; 0; 0; \dots; 0); (k; 0; 0; \dots; 0)\}$, где $m, k > 0$.

Далее доказывается аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание. Для любого множества $X = \{(x_1; y_1); \dots; (x_k; y_k)\}$ на плоскости, строго отделенного от нуля, найдутся такие две точки $(x_l; y_l)$ и $(x_t; y_t)$, принадлежащие этому множеству, что прямая, построенная алгоритмом Новикова для этих двух точек, будет строго отделять и оригинальное множество.



Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А. С. Введение в теорию интеллектуальных систем. — М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2006.

в обучающей последовательности бесконечное число раз, но порядок следования векторов не строго определен.