

О минимизации монофункциональных классов бинарных клеточных автоматов с неразрешимым свойством обратимости

И. В. Кучеренко

В работе продолжается исследование вопросов алгоритмического распознавания свойства обратимости для клеточных автоматов. Построен класс двумерных бинарных клеточных автоматов с фиксированной локальной функцией переходов с 91 переменной, в котором задача распознавания свойства обратимости является алгоритмически неразрешимой.

Ключевые слова: клеточные автоматы, обратимые клеточные автоматы, машины Тьюринга, проблема останковки.

Введение

Клеточные автоматы (КА) являются дискретной математической моделью процессов, для которых существенна не только временная, но и пространственная протяженность [1]. Важное семейство клеточных автоматов образуют обратимые КА, то есть такие, в которых «предыстория» возникновения конфигурации определяется однозначно. Класс обратимых КА представляет как теоретический, так и прикладной интерес — в связи с задачами защиты информации, синтеза квантовых вычислителей, проектирования вычислительных систем с пониженным энергопотреблением и других.

Работа посвящена задаче алгоритмического распознавания свойства обратимости в классах двумерных бинарных КА (у которых ячейка имеет два состояния). В предыдущих работах автором было установлено, что свойство обратимости не распознаваемо в классе

всех двумерных бинарных клеточных автоматов [4]. С другой стороны, в классе двумерных бинарных клеточных автоматов, в котором содержатся только КА с линейными локальными функциями переходов, свойство обратимости разрешимо [5]. В связи с этим возникает задача классификации «естественных» классов КА на те, в которых свойство обратимости разрешимо, и те, для которых это не так.

В работе рассматриваются классы бинарных двумерных КА, имеющих фиксированную локальную функцию переходов (в таком классе варьируются исключительно вектора в локальном шаблоне соседства); такие классы будем называть монофункциональными. Автором построен монофункциональный класс двумерных бинарных клеточных автоматов, в котором задача распознавания свойства обратимости является алгоритмически не разрешимой. При этом установлено, что число переменных у локальной функции переходов в данном классе равно 91.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Кудрявцеву В. Б., без помощи и поддержки которого результаты, составляющие содержание данной работы, не существовали бы.

1. Основные понятия и результаты

Формально клеточный автомат σ представляет из себя четверку вида $(\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$, где \mathbb{Z}^k — совокупность всех k -мерных векторов с целочисленными координатами; $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$; $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $m \in \mathbb{N}$, — упорядоченный набор различных ненулевых векторов из \mathbb{Z}^k ; $\varphi : (E_n)^{m+1} \mapsto E_n$, $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$. Элементы множества \mathbb{Z}^k называются ячейками, E_n — состояниями ячеек, 0 — состояние покоя. При помощи шаблона соседства V каждой ячейке α ставится в соответствие набор векторов $V(\alpha) = (\alpha, \alpha + v_1, \alpha + v_2, \dots, \alpha + v_m)$, который называется ее окрестностью. Функция φ называется локальной функцией переходов клеточного автомата.

Функции $g : \mathbb{Z}^k \mapsto E_n$ называются состояниями КА. Основная функция переходов Φ задается как отображение множества всех состояний клеточного автомата σ в себя, причем если $g = \Phi(g')$, то $g(\alpha) = \varphi(g'(\alpha), g'(\alpha + v_1), g'(\alpha + v_2), \dots, g'(\alpha + v_m))$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^k$. Функционирование КА определяется как последовательность его состо-

яний g_0, g_1, g_2, \dots , получающаяся в результате применения основной функции переходов к некоторому его состоянию g_0 , то есть $g_t = \Phi(g_{t-1}) = \Phi^t(g_0)$, t — натуральное число. Состояние клеточного автомата, в котором только конечное число ячеек находится в ненулевом состоянии, называется конфигурацией.

Клеточный автомат, основная функция переходов которого инъективна на множестве всех конфигураций, называется обратимым. По теореме Мура-Майхилла [1] множество обратимых клеточных автоматов совпадает с множеством КА, основная функция переходов которых является сюръективной.

Обозначим через $CA(2, 2, m, \varphi)$ множество двумерных бинарных клеточных автоматов с фиксированной локальной функцией переходов φ , зависящей от $m + 1$ переменных. Будем задавать индивидуальные клеточные автоматы из множества $CA(2, 2, m, \varphi)$ набором из m двумерных ненулевых целочисленных векторов V (их шаблоном соседства). Задача алгоритмического распознавания свойства обратимости заключается в построении машины Тьюринга (МТ), которая на наборе $V = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m))$, записанном на ее ленте в виде последовательности из $2 \cdot m$ натуральных чисел $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$ в унитарной записи (отдельные числа разделяются одиночной буквой «0»; в начальном состоянии на всей «свободной» части ленты записана буква «0», головка находится над самой левой буквой «1» конфигурации), останавливается, при этом в ячейке ленты, находящейся под головкой в момент остановки, должна находиться буква «1», если клеточный автомат $\sigma = (\mathbb{Z}^2, E_2, V, \varphi)$ обратим, или «0», если σ не обратим.

Автором был получен следующий результат.

Теорема 1. *Существует булева функция $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_m)$ с 91 переменной ($m = 90$) такая, что в классе $CA(2, 2, m, \varphi)$ свойство обратимости алгоритмически не разрешимо.*

Теорема 1 получается сведением проблемы обратимости КА к проблеме остановки МТ в специальной постановке.

Теорема 2. *Существует машина Тьюринга с 61 состоянием головки и тремя символами на ленте, для которой не разрешима проблема остановки на словах, представляющих из себя наборы из одних единиц, при расположении головки в начальный момент времени над самой левой единицей слова.*

Данная постановка была выбрана так, чтобы максимально уменьшить число переменных функции φ . Доказательство теоремы 2 получено автором статьи.

2. Оценка числа состояний головки МТ с неразрешимой проблемой останковки на унитарных словах

В данном разделе будет приведено доказательство теоремы 2. Доказательство состоит из последовательности сведений неразрешимости проблем останковки машин Тьюринга в разных постановках.

При построении данной последовательности сведений целью была минимизация длины бинарного кода, необходимого для кодирования таблицы вычисления в доказательстве теоремы 1. При используемой схеме кодирования необходимая мощность кода выражается функционалом $L(h, l) = 4 + 4 * l + h$, где l — число символов на ленте МТ, h — число состояний головки МТ. Целью являлось либо добиться $L(h, l) \leq 44$ (длина кода 12), либо $L(h, l) \leq 81$ (длина кода 13). Отметим, что наилучшая с точки зрения минимизации функционала на сегодняшний день универсальная МТ имеет параметры $h = 15$, $l = 2$ [16], что приводит к значению функционала 27 и дает код длины 12. Однако для данной универсальной МТ проблема останковки в постановке, используемой для построения класса КА с фиксированной ЛФП и неразрешимым свойством обратимости является разрешимой, и требуется ее модификация. Чтобы код имел длину 12, требуется при модификации либо обойтись максимум 16 дополнительными состояниями головки без увеличения разрядности ленты, либо 10 дополнительными состояниями и одним дополнительным символом на ленте, либо 4 дополнительными состояниями и двумя дополнительными символами на ленте. У автора не получилось уложиться в эти ограничения, однако им было получено относительно элементарное построение сведения для параметров $h = 61$, $l = 3$, что дает значение $L(61, 3) = 77$ и длину кода 13. Это построение будет приведено в данном разделе.

Стоит отметить, что задача минимизации числа переменных локальной функции переходов клеточного автомата в теореме 1 не сводится к минимизации одного функционала $L(h, l)$ — детали постанов-

ки неразрешимой проблемы остановки МТ также оказывают влияние на сложность ЛФП посредством архитектуры вычислительного процесса, реализуемого в КА.

Зафиксируем формализм, который будет использоваться для работы с машинами Тьюринга. Под машиной Тьюринга будем понимать четверку

$$\tau = (A, Q, \dot{q}, \delta),$$

где множество A — алфавит ленты, $0 \in A$ — пустой символ, Q — множество состояний головки, состояние $\dot{q} \in Q$ выделено как начальное; δ — функция переходов МТ, $\delta : Q \times A \mapsto Q \times A \times \{-1, 0, 1\} \cap \{\Lambda\}$, где символ Λ интерпретируется как сигнал остановки МТ. При этом будем полагать, что существует ровно одно состояние $\hat{q} \in Q$, такое что $\exists a \in A \delta(\hat{q}, a) = \Lambda$. В случае, если для $\hat{q} \in Q$ справедливо, что для всех $a \in A \delta(\hat{q}, a) = \Lambda$, будем называть состояние \hat{q} финальным. Будем рассматривать машины Тьюринга с бесконечной двухсторонней лентой. Конфигурацией ленты T МТ будем называть отображение из множества целых чисел \mathbb{Z} (будем рассматривать его как множество ячеек ленты) в алфавит ленты A , $T : \mathbb{Z} \mapsto A$, при этом только для конечного множества ячеек ленты $z \in \mathbb{Z}$ выполняется $T(z) \neq 0$. Конфигурацией МТ будем называть тройку (T, q, z) , где T — конфигурация ленты, $q \in Q$ — состояние головки МТ, $z \in \mathbb{Z}$ — ячейка, над которой находится головка. Функционирование МТ происходит в дискретном времени и описывается как последовательность конфигураций МТ $c_0, c_1, c_2, \dots, c_t, \dots$. От начальной конфигурации c_0 требуется, чтобы головка находилась в начальном состоянии $q = \dot{q}$ и стояла в нулевой ячейке $z = 0$. Любые две последовательные конфигурации $c_t = (T_t, q_t, z_t)$ и $c_{t+1} = (T_{t+1}, q_{t+1}, z_{t+1})$, $t \in \mathbb{N}_0$, должны быть согласованы следующим образом.

- 1) Если $\delta(q_t, T_t(z_t))$ равно Λ (символу остановки), то $c_t = c_{t+1}$.
- 2) Если $\delta(q_t, T_t(z_t))$ не равно Λ , то должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} \delta(q_t, T_t(z_t)) &= (q_{t+1}, T_{t+1}(z_t), \mu), \\ \forall z \neq z_t \quad T_t(z) &= T_{t+1}(z), \quad z_{t+1} = z_t + \mu. \end{aligned}$$

В случае, если существует $t \in \mathbb{N}_0$ такое, что $\delta(q_t, T_t(z_t)) = \Lambda$, будем говорить, что машина Тьюринга останавливается на входе T_0 .

Известно множество алгоритмически неразрешимых задач, связанных со свойствами функционирования МТ [7], [10], [8]. Простейшей такой задачей является проблема остановки — а именно определение по заданной машине Тьюринга τ и начальной ее конфигурации ленты T остановится ли τ на T .

Далее будет использоваться несколько разновидностей проблемы остановки, опишем их формально. Под проблемой остановки с произвольным стартом на бинарных словах будем понимать проблему остановки для МТ с двумя состояниями ленты и отсутствующими ограничениями на расположение клеток с непустыми символами относительно головки (то есть для конфигурации ленты произвольного вида).

Под проблемой остановки на бинарных словах с левым стартом будем понимать проблему остановки для МТ с двумя состояниями ленты на начальной конфигурации ленты T , для которой справедливо, что для всех $z < 0$ $T(z) = 0$ и $T(0) = 1$.

Под проблемой остановки на унитарных словах с левым стартом будем понимать проблему остановки для МТ с как минимум двумя состояниями ленты и не пустым символом 1, входящим в алфавит ленты, на начальном состоянии ленты T вида

$$T(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & 0 \leq z < u, \\ 0, & z \geq u, \end{cases}$$

где $u \in \mathbb{N}$.

Дальнейшее изложение будет представлять из себя последовательность сведений приведенных проблем остановки друг к другу.

Лемма 1. *Существует машина Тьюринга τ_1 с $h_1 = 15$ состояниями головки и двумя состояниями ленты такая, что проблема остановки на бинарных словах с произвольным стартом неразрешима для МТ τ_1 .*

Доказательство. В статье [16] приводится конструкция МТ τ_1 с $h_1 = 15$ состояниями головки и двумя состояниями ленты, которая является универсальной в том смысле, что позволяет симулировать специальный вариант системы productions Поста (bi-tag system), которые в свою очередь симулируют циклические правосторонние маши-

ны Тьюринга (Clockwise Turing Mashine), которые в свою очередь позволяют симулировать машины Тьюринга. При этом начальная конфигурация МТ τ_1 , используемая для симуляции систем продукций Поста, предполагает расположение головки МТ в середине слова в строго определенной позиции.

МТ τ_1 удовлетворяет ограничениям, накладываемым нами на определение МТ, при условии, что «отсутствие перехода» на паре (q, a) понимается как $\delta(q, a) = \Lambda$. «Отсутствие перехода» у МТ τ_1 имеется только в одном состоянии — в обозначениях для состояний и символов ленты из статьи [16] это переход $\delta(u_{10}, b)$. Отметим также, что у МТ τ_1 отсутствуют переходы вида $\delta(q, a) = (q', b, 0)$, то есть при любом переходе головка не остается на месте.

Покажем от противного, что проблема остановки на бинарных словах с произвольным стартом не разрешима для τ_1 . Рассмотрим машину Тьюринга τ_0 и некоторую ее начальную конфигурацию ленты T . Осуществим последовательность сведения из статьи [16] к начальной конфигурации T' МТ τ_1 . Отметим, что τ_0 останавливается на T тогда и только тогда, когда τ_1 останавливается на T' . Следовательно, из предположения о разрешимости проблемы остановки на бинарных словах с произвольным стартом для τ_1 вытекало бы разрешимость проблемы остановки для машин Тьюринга, что противоречиво. Доказательство леммы 1 закончено.

Лемма 2. *Пусть машина Тьюринга τ_1 с двумя состояниями ленты и h_1 состояниями головки имеет неразрешимую проблему остановки на бинарных словах с произвольным стартом. Тогда существует МТ τ_2 с двумя состояниями ленты и $h_2 = 3 \cdot h_1 + 2$ состояниями головки такая, что проблема остановки на бинарных словах с левым стартом неразрешима для τ_2 .*

Доказательство. В доказательстве будут использоваться техника моделирования на решетке с шагом два из книги [3]. Мы будем использовать две решетки — основную, которая будет представлять из себя множество ячеек, номера которых являются четными числами, и служебную — состоящую из ячеек с нечетными номерами. Основная идея сведения заключается в следующем — построим модификацию τ'_1 МТ τ_1 такую, чтобы она работала на основной решетке так же, как τ_1 на своей ленте. При моделировании на основной решетке расположим начальную конфигурацию τ_1 с таким сдвигом, чтобы крайняя

левая ячейка, содержащая единицу, попала в ячейку под номером 0. На служебную ленту запишем нули за исключением одной ячейки, находящейся правее ячейки основной ленты, над которой должна была находиться головка τ_1 в начальный момент времени. Добавим к τ'_1 подпрограмму, которая смещает головку вправо до тех пор, пока не увидит единицу на служебной ленте, после этого переходит на основную ленту и запускает программу τ'_1 . Обозначим τ'_1 с этой подпрограммой как τ_2 . МТ τ_2 и будет искомой.

Перейдем к формальным построениям. Пусть множество состояний Q_1 МТ τ_1 имеет вид $\{q_1, q_2, \dots, q_{h_1}\}$. Тогда множество состояний Q'_1 МТ τ'_1 будет иметь вид $Q'_1 = Q_1 \cup \{q_1^1, q_1^{-1}, q_2^1, q_2^{-1}, \dots, q_{h_1}^1, q_{h_1}^{-1}\}$. Пусть $q_1 \in Q_1$ — начальное состояние МТ τ_1 , тогда начальным состоянием МТ τ'_1 будет также q_1 . Определим функцию переходов δ'_1 МТ τ'_1 через функцию переходов δ_1 МТ τ_1 следующим образом.

$$\delta'_1(q, a) = \begin{cases} \Lambda, & q \in Q_1, \delta_1(q, a) = \Lambda; \\ (\bar{q}, b, 0), & q \in Q_1, \delta_1(q, a) = (\bar{q}, b, 0); \\ (q_i^s, b, s), & q \in Q_1, \delta_1(q, a) = (q_i, b, s); \\ (q_i, a, s), & q \in Q'_1 \setminus Q_1, q = q_i^s. \end{cases}$$

Идея построения машины τ'_1 следующая — переходы $\delta_1(q, a) = (\bar{q}, b, s)$, для которых $s \neq 0$, заменяем на пары переходов $\delta'_1(q, a) = (\bar{q}^s, b, s)$, $\delta'_1(\bar{q}^s, x) = (\bar{q}, x, s)$. Переходы без сдвига и с символом остановки оставляем как есть.¹

Пусть T — начальная конфигурация T МТ τ_1 . Пусть z_l — номер ячейки такой, что $T(z_l) = 1$ и для всех $z < z_l$ $T(z) = 0$. Пусть $z_s = \min(z_l, 0)$. Построим на основе T начальную конфигурацию T' МТ τ'_1 по следующим формулам.

$$T'(z) = \begin{cases} T(z/2 + z_s), & z \equiv 0 \pmod{2}; \\ 1, & z = 1 - 2 \cdot z_s; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Добавим к τ'_1 подпрограмму сдвига головки в начальное положение. Под подпрограммами будем понимать некоторое множество состояний головки и заданной таблицы переходов для этих состояний. Пусть задан переход $\delta(q, a) = (p, b, s)$. Будем описывать его строчкой таблицы следующего вида.

¹Отметим, что в МТ τ_1 из статьи [16] переходы без сдвига не используются. Случай таких переходов рассмотрен для общности доказательства.

$$q \ a \ \mapsto \ p \ b \ s$$

При этом встречаются ситуации, когда некоторую группу переходов удобно задать в виде $\delta(q, x) = (p, f(x), s)$, где x — переменная, $f(x)$ — булева функция. Будем описывать такие группы строками таблицы следующего вида.

$$q \ x \ \mapsto \ p \ f(x) \ s$$

Подпрограмма сдвига головки будет иметь два состояния qs_1 и qs_2 . В переходах этой подпрограммы будет встречаться состояние q_1 — это начальное состояние МТ τ'_1 .

$$\begin{array}{l} qs_1 \ x \ \mapsto \ qs_2 \ x \ 1 \\ qs_2 \ 0 \ \mapsto \ qs_1 \ 0 \ 1 \\ qs_2 \ 1 \ \mapsto \ q_1 \ 1 \ -1 \end{array}$$

Обозначим МТ, которая получается из τ'_1 добавлением подпрограммы сдвига головки и изменением начального состояния на qs_1 , через τ_2 . Заметим, что число состояний головки h_2 МТ τ_2 будет равно $h_2 = 3 \cdot h_1 + 2$.

Из построения видно, что τ_1 останавливается на начальной конфигурации ленты T тогда и только тогда, когда τ_2 останавливается на T' . При этом проблема остановки τ_2 на T' удовлетворяет ограничениям проблемы остановки на бинарных словах с левым стартом. Следовательно проблема остановки на бинарных словах с левым стартом не разрешима для τ_2 . Доказательство леммы 2 закончено.

Лемма 3. Пусть машина Тьюринга τ_2 с двумя состояниями ленты и h_2 состояниями имеет неразрешимую проблему остановки на бинарных словах с левым стартом. Тогда существует МТ τ_3 с $h_3 = h_2 + 14$ состояниями головки и тремя состояниями ленты такая, что проблема остановки на унитарных словах с левым стартом неразрешима для τ_3 .

Доказательство. Идея доказательства леммы следующая. Конфигурацию МТ можно представить как пару из слова α из нулей и единиц и сдвига z_s головки МТ относительно самого левого символа слова α на ленте. В случае начальной конфигурации для проблемы остановки с левым стартом представление всегда можно выбрать так,

что z_s будет равен 0, и что слово α будет иметь самым левым символом единицу. Далее, α можно рассматривать как двоичную запись некоторого натурального числа a . Рассмотрим представление числа a в унитарном формате. Машина τ_3 будет выполнять следующую работу — переводить унитарную запись числа a в двоичную (строить α), ставить головку над самым левым символом α и «запускать» машину τ_2 .

Само построение α будем реализовывать по следующему алгоритму. Заводим на ленте конфигурацию-счетчик, начальное состояние которого нулевое. Далее стираем по одной единице унитарного представления a и прибавляем единичку к счетчику. Как только единиц в представлении a не останется — в счетчике будет находиться α . Остается только стереть служебную разметку для организации счетчика и поставить головку МТ в самый левый символ α .

Машина τ_3 будет иметь алфавит ленты из трех символов — 0, 1, 2. Конфигурация-счетчик будет иметь вид слова из символов 0 и 1, у которого слева и справа находится по одному символу 2. Доопределим машину τ_2 до машины τ'_2 , алфавит ленты которой состоит из символов 0, 1, 2. При этом все переходы для ситуации, когда МТ τ'_2 видит на ленте символ 0 или 1, у машин τ'_2 и τ_2 будут совпадать. В ситуации, когда МТ τ'_2 видит на ленте символ, переходы определим как $\delta(q, 2) = (q, 2, 0)$, то есть машина τ'_2 «замирает» при появлении двойки на ленте. Так как в процессе, моделируемом при сведении, двойки на ленте у МТ τ'_2 не возникают, такое доопределение нас устраивает.

Построение α по унитарному представлению a будет состоять из четырех подпрограмм.

- Первая подпрограмма Р1 строит конфигурацию-счетчик слева от унитарного представления a , ставит головку на правую двойку счетчика b , передает управление второй подпрограмме.
- Вторая подпрограмма Р2 стирает самую правую единицу унитарного представления, возвращает головку на правую двойку счетчика и передает управление третьей подпрограмме; в случае если единиц в унитарном представлении не осталось — ставит головку на правую двойку счетчика и вызывает четвертую подпрограмму.
- Третья подпрограмма Р3 прибавляет единицу к значению счетчика (возможно увеличивая его в размерах в левую сторону),

возвращает головку на правую двойку счетчика, передает управление второй подпрограмме.

- Четвертая подпрограмма P4 удаляет двойки из конфигурации счетчика, переводит головку на самый левый символ слова α и передает управление МТ τ'_2 .

Приведем пример функционирования этой подпрограммы для начального слова из двух единиц. В данной записи символ Н обозначает головку, которая находится над символом ленты с кодом, приведенным правее нее, то есть в записи $\dots aHbc\dots$ предполагается, что головка находится над ячейкой со значением b . Справа от конфигурации МТ приводятся комментарии в стиле языка С.

```
0000Н1100 // P1 формируем счетчик
0000Н01100
000Н021100
00Н0021100
002Н021100
0020Н21100 // P2 удаление единицы справа
00202Н1100
002021Н100
0020211Н00
002021Н100
00202Н1000
0020Н21000 // P3 прибавление 1 к счетчику
002Н021000
0021Н21000 // P2 удаление единицы справа
00212Н1000
002121Н000
00212Н1000
0021Н20000 // P3 прибавление 1 к счетчику
002Н120000
00Н2020000
0Н01020000
02Н1020000
021Н020000
0210Н20000 // P2 удаление единицы
02102Н0000 // единиц нет
```

```

0210H20000 // P4 удаление разметки счетчика
021H000000
02H1000000
0H21000000
00H1000000 // передаем управление

```

Приведем формальное описание подпрограмм P1, P2, P3, P4. Состояниями подпрограммы P1 будет множество $\{qc_0, qc_1, qc_2, qc_3, qc_4\}$ (буква «с» в имени состояний от английского слова «create»). Состояниями подпрограммы P2 будет множество $\{qd_0, qd_1, qd_2\}$ (буква «d» от «delete»). Состояниями подпрограммы P3 будет множество $\{qa_0, qa_1, qa_2, qa_3\}$ (буква «а» от «add»). Состояниями подпрограммы P4 будет множество $\{qf_0, qf_1\}$ (буква «f» от «finish»). Предполагается, что начальным состоянием МТ τ'_2 является q_0 . Начальным состоянием τ_3 полагаем qc_0 .

Приведем описания переходов подпрограмм P1, P2, P3, P4 в том же стиле, как мы это делали в доказательстве леммы 2, но дополнительно добавим слева столбец с номерами строк. В описаниях переходов для подпрограмм ниже будут определяться не все возможные переходы. Это связано с тем, что не указанные переходы не возникают в процессе сведения. Для определенности будем полагать, что все не указанные переходы имеют вид $\delta(q, a) = (q, a, 0)$, то есть головка МТ закликивается оставаясь на месте и не меняя состояния ленты.

Подпрограмма P1 (создание счетчика).

1. $qc_0 \quad 1 \mapsto qc_1 \quad 1 \quad -1$
2. $qc_1 \quad 0 \mapsto qc_2 \quad 2 \quad -1$
3. $qc_2 \quad 0 \mapsto qc_3 \quad 0 \quad -1$
4. $qc_3 \quad 0 \mapsto qc_4 \quad 2 \quad 1$
5. $qc_4 \quad 0 \mapsto qd_0 \quad 0 \quad 1$

Подпрограмма P2 (удаление правой единицы в унитарной записи).

1. $qd_0 \ 2 \mapsto qd_0 \ 2 \ 1$
2. $qd_0 \ 1 \mapsto qd_0 \ 1 \ 1$
3. $qd_0 \ 0 \mapsto qd_1 \ 0 \ -1$
4. $qd_1 \ 1 \mapsto qd_2 \ 0 \ -1$
5. $qd_1 \ 2 \mapsto qf_0 \ 2 \ 0$
6. $qd_2 \ 1 \mapsto qd_2 \ 1 \ -1$
7. $qd_2 \ 2 \mapsto qa_0 \ 2 \ -1$

Подпрограмма P3 (прибавление единицы к счетчику).

1. $qa_0 \ 0 \mapsto qd_0 \ 1 \ 1$
2. $qa_0 \ 1 \mapsto qa_1 \ 0 \ -1$
3. $qa_1 \ 0 \mapsto qa_2 \ 1 \ 1$
4. $qa_2 \ 0 \mapsto qa_2 \ 0 \ 1$
5. $qa_2 \ 1 \mapsto qa_2 \ 1 \ 1$
6. $qa_2 \ 2 \mapsto qd_0 \ 2 \ 0$
7. $qa_1 \ 1 \mapsto qa_1 \ 0 \ -1$
8. $qa_1 \ 2 \mapsto qa_3 \ 1 \ -1$
9. $qa_3 \ 0 \mapsto qa_2 \ 2 \ 1$

Подпрограмма P4 (удаление служебной разметки).

1. $qf_0 \ 2 \mapsto qf_1 \ 0 \ -1$
2. $qf_1 \ 0 \mapsto qf_1 \ 0 \ -1$
3. $qf_1 \ 1 \mapsto qf_1 \ 1 \ -1$
4. $qf_1 \ 2 \mapsto q_0 \ 0 \ 1$

Отметим, что суммарно для процедуры сведения потребовалось 14 состояний, то есть $h_3 = h_2 + 14$. Начальная конфигурация МТ τ_3 удовлетворяет условиям проблемы остановки на унитарных словах с левым стартом. Следовательно из неразрешимости проблемы остановки на бинарных словах с левым стартом для τ_2 вытекает неразрешимость проблемы остановки на унитарных словах с левым стартом для τ_3 . Доказательство леммы 3 закончено.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся приведенной выше последовательностью лемм.

По лемме 1 существует машина Тьюринга τ_1 с $h_1 = 15$ состояниями головки и двумя состояниями ленты такая, что проблема остановки на бинарных словах с произвольным стартом неразрешима для МТ τ_1 .

По лемме 2 существует МТ τ_2 с двумя состояниями ленты и $h_2 = 2 + 3 \cdot h_1 = 47$ состояниями головки такая, что проблема остановки на бинарных словах с левым стартом неразрешима для τ_2 .

По лемме 3 существует МТ τ_3 с $h_3 = h_2 + 14 = 61$ состояниями головки и тремя состояниями ленты такая, что проблема остановки на унитарных словах с левым стартом неразрешима для τ_3 .

Машина τ_3 — искомая. Доказательство теоремы 2 закончено.

В следующем разделе нам понадобятся несколько подробностей про функционирование МТ τ_3 . Сведем их в лемму.

Лемма 4. *Машина Тьюринга τ_3 из теоремы 2 обладает следующими свойствами.*

- 1) *На начальных конфигурациях, представляющих из себя унитарные слова с расположением головки над самой правой единицей, МТ τ_3 не останавливается как минимум в течении первых пяти тактов.*
- 2) *Переход из начального состояния \dot{q} при значении состояния ячейки ленты 1 МТ τ_3 имеет вид $\delta_3(\dot{q}, 1) = (\ddot{q}, 1, -1)$, где $\ddot{q} = qc_1$.*
- 3) *Машина Тьюринга τ_3 имеет единственный переход с сигналом остановки вида $\delta_3(\hat{q}, 1) = \Lambda$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из построения подпрограммы P1. В принципе, оценку на время остановки можно увеличить, но данный результат не будет востребован далее.

Второе утверждение леммы следует из кода подпрограммы P1 — начальный переход там имеет указанный вид.

Третье утверждение следует из таблицы переходов МТ τ_1 из статьи [16] — рассматриваемая таблица там указана в явном виде.

3. Построение монофункционального класса клеточных автоматов с неразрешимым свойством обратимости

Построение, приводимое в данном разделе, идейно близко к доказательству теоремы о неразрешимости свойства обратимости в классе двумерных бинарных линейных КАПС с T-шаблоном соседства,

полученному автором [5]. Однако, при построении бинарного монофункционального КА делался упор на минимизацию числа переменных в локальной функции переходов, в связи с чем детали построений отличаются. Основные отличия заключаются в следующем.

- Используется другой вид таблицы для задания графика функционирования МТ, направленный на максимальное уменьшение числа состояний отдельной клетки таблицы.
- Локальная проверка на корректность включает дополнительную проверку на корректность для первой строки — она должна иметь вид унитарной записи числа с головкой над самой левой единицей.
- Используется специально разработанное кодирование для клеток таблицы с добавленным к нему битом линейной системы, требующее для идентификации позиции бита просмотреть слово длины, совпадающей с длиной кодового слова. Это позволяет уменьшить размер шаблона соседства по сравнению с конструкцией, использованной при доказательстве теоремы о распознавании свойства обратимости в классе двумерных КА с фиксированным числом состояний ячейки [4].

При доказательстве теоремы 1 мы будем сводить проблему распознавания обратимости в классе КА $CA(2, 2, m, \varphi)$ к проблеме останова МТ τ_3 из теоремы 2. В данном разделе будем обозначать представление τ_3 в виде следующей четверки $(E_3, Q, \dot{q}, \delta)$ (см. определение на странице 231). Пусть МТ τ_3 останавливается на конфигурации ленты T_0 , последовательность C конфигураций функционирования имеет вид $c_0, c_1, c_2, \dots, c_t, \dots$, где $c_t = (T_t, q_t, z_t)$. Обозначим через $s(C)$ момент останова МТ для данного функционирования, формально $s(C) = \min\{t \in N \mid \delta(T_t(z_t), q_t) = \Lambda\}$.

Назовем левой (правой) границей вычисления $W_l(c)$ ($W_r(c)$) для конфигурации c минимум (максимум) из координат ячеек ленты, у которых либо значение не нулевое, либо над ними находится головка. Назовем левой границей функционирования $W_l(C)$ для функционирования C минимум из левых границ вычисления на конфигурациях до момента останова МТ включительно, формально

$$W_l(C) = \min_{0 \leq i \leq s(C)} W_l(c_i).$$

Назовем правой границей функционирования $W_l(C)$ для функционирования C максимум из правых границ вычисления на конфигурациях до момента остановки МТ включительно, формально

$$W_r(C) = \max_{0 \leq i \leq s(C)} W_r(c_i).$$

Назовем размахом $W(C)$ функционирования C число

$$W(C) = W_r(C) - W_l(C) + 1.$$

Для краткости будем называть функционирования, в которых МТ останавливается, конечными. В случае, если функционирование C не является конечным, будем полагать не определенными величины $s(C)$, $W_l(C)$, $W_r(C)$, $W(C)$. Далее мы будем рассматривать только функционирования, начинающиеся с состояния ленты, которые представляют из себя унитарную запись некоторого натурального числа $U(C)$, с головкой, находящейся над самой левой единицей.

Мы будем представлять конечные функционирования C конечными прямоугольными таблицами ширины $W(C) + 1$ и высоты $s(C) + 1$. Ячейки таблицы будут содержать элементы из множества $Q \cup M$, где Q — множество состояний головки МТ τ_3 , M — множество кодов ленты МТ τ_3 с разметкой, $Q \cap M = \emptyset$. Множество M будет следующим:

$$M = \{0fr, 0fl, 1fl, \\ 00r, 10r, 20r, 00l, 10l, 20l, \\ 01r, 11r, 21r, 01l, 11l, 21l\}.$$

При этом элементам M вида xmd придается следующий содержательный смысл: x интерпретируется как значение ячейки ленты МТ, m — разметка четности момента времени конфигурации c_t (f для c_0 , 0 для конфигураций с четным натуральным t , 1 для конфигураций с нечетным натуральным t), d — положение кода головки в строке относительно ячейки таблицы (r — справа, l — слева).

Пусть $c_t = (T_t, q_t, z_t)$ — конфигурация МТ τ_3 функционирования C . Будем ее представлять строкой таблицы вида:

$$\boxed{T_t(w_l)mr \quad \dots \quad T_t(z_t - 1)mr \quad q_t \quad T_t(z_t)ml \quad \dots \quad T_t(w_r)ml}$$

Где $w_l = W_l(C)$, $w_r = W_r(C)$, m соответствует четности t .

Опишем формат строки таблицы формально. Будем предполагать, что ячейки таблицы пронумерованы числами от $W_l(C) - 1$ до $W_r(C)$ слева направо. В ячейках с номером y из целочисленного отрезка $[W_l(C) - 1, z_t - 2]$ находятся значения $T_t(y + 1)$ с добавленной разметкой mr (то есть элементы из M вида xmr). В ячейке с номером $z_t - 1$ находится значение состояния головки МТ q_t . В ячейке с номерами y из отрезка $[z_t, W_r(C)]$ находятся значения $T_t(y)$ с добавленной разметкой ml . Значения m во всех ячейках строки одинаковые, при этом если $m = f$, то кодируемое состояние МТ должно представлять из себя унитарное слово с головкой над самой левой единицей. Будем называть строку таблицы правильной, если она удовлетворяет указанным требованиям к значениям ее ячеек.

В силу того, что во множество M не входит элемент вида $1fr$, начальные конфигурации МТ, содержащие единицы правее головки МТ, не могут быть выражены строкой таблицы. Такая кодировка таблицы была введена умышленно, с целью экономии числа состояний ячеек таблицы.

Строки таблицы будем нумеровать от верхней к нижней целыми числами из отрезка $[0, s(C)]$. В строчке с номером i будем представлять конфигурации c_i . В результате конечному функционированию C будет сопоставлена конечная таблица $T(C)$.

Далее будем вводить правила локальной корректности таблицы таким образом, чтобы любая локально корректная таблица однозначно (с точностью до ширины горизонтальных «полей») образом соответствовала некоторому конечному функционированию МТ. Для дальнейшего изложения нам будет удобно формализовывать таблицы аналогично конфигурациям некоторого двумерного клеточного автомата. Для того, чтобы не было путаницы с предшествовавшим изложением, сменим терминологию с «таблиц функционирования» на «графики вычисления».

Графиком вычисления будем называть отображение $\Gamma, \Gamma : \mathbb{Z}^2 \mapsto M \cup Q \cup \{nul, bad, bl\}$, у которого множество прообразов значений не равных nul конечно. При этом элементы α области определения графиков вычисления \mathbb{Z}^2 будем называть ячейками, nul будем называть нулевым или пустым значением ячейки, bad будем называть дефектным значением ячейки. Содержательно значение bad понадобится в дальнейшем в построении КА при переходе к двоичным кодам — оно будет соответствовать ненулевому бинарному слову, не принадлежа-

щему множеству используемых кодов. При этом nul будет соответствовать тождественно нулевому кодовому слову. Элемент bl будет использоваться для обозначения правого края таблицы вычисления.

Для определения локальности графиков будем пользоваться аналогом терминов для клеточных автоматов «шаблон соседства», «окрестность ячейки», «блок», «окрестность блока». В качестве шаблона соседства будем использовать шаблоны $V^\star = (v_e, v_s, v_{sw}, v_w, v_n)$ и $V^+ = (v_e, v_s, v_w, v_n)$, где

$$v_e = (1, 0), v_s = (0, -1), v_{sw} = (-1, -1), v_w = (-1, 0), v_n = (0, 1).$$

Далее будем задавать ограничения, которым должна удовлетворять локально корректная конфигурация. Делать это будем следующим образом — указывать список допустимых конфигураций окрестностей ячеек относительно шаблона соседства V^\star . При этом если окрестность ячейки графика с ненулевым значением не попадает в список допустимых конфигураций, график вычисления в ячейке будет называть не корректным (а если попадает — корректным). Список конфигураций будет разбит на четыре подсписка в соответствии со смыслом ограничений: конфигурации первой строки, конфигурации последней строки, конфигурации боковых ячеек, конфигурации внутренних ячеек.

Для наглядности будем указывать конфигурации в виде зарисовок следующего вида.

NUM	X_n	
X_w	X	X_e
X_{sw}	X_s	

Где NUM — имя зарисовки; X — множество значений ячейки α ; $X_e, X_s, X_{sw}, X_w, X_n$ — множество значений ячеек $\alpha + v_e, \alpha + v_s, \alpha + v_{sw}, \alpha + v_w, \alpha + v_n$ соответственно. В общем случае этот рисунок будет задавать множество допустимых конфигураций, получаемых подстановкой всех возможных комбинаций значений ячеек из $X, X_e, X_s, X_{sw}, X_w, X_n$. Для задания множеств значений элементов из M вида $\{0md, 1md, 2md\}$ будем использовать обозначение $*md$, для задания множеств вида $\{0mr, 1mr, 2mr, 0ml, 1ml, 2ml\}$ — обозначение $*m*$. Также на зарисовках будут использоваться символы переменных, допустимые множества значений которых будет описываться в комментариях к зарисовке, при этом ограничение на значения переменных

будут сужать множество допустимых конфигураций. С учетом всех перечисленных «степеней свободы» зарисовка NUM будет задавать некоторое множество Υ состояний окрестности $V^\star(\alpha)$ ячейки α . Будем говорить, что значение состояния окрестности ячейки α графика вычислений Γ удовлетворяет зарисовке NUM, если состояние ее окрестности $V^\star(\alpha)$ в графике Γ лежит в Υ . Иногда для краткости будем говорить, что ячейка удовлетворяет зарисовке — если понятно о каком графике вычисления и какой окрестности идет речь.

Зададим допустимые конфигурации первой строки.

F1	<i>nul</i>			F2	<i>nul</i>			F3	<i>nul</i>		
<i>nul</i>	<i>0fr</i>	<i>0fr</i>		<i>0fr</i>	<i>0fr</i>	<i>0fr</i>		<i>0fr</i>	<i>0fr</i>	\dot{q}	
<i>nul</i>	<i>01r</i>			<i>01r</i>	<i>01r</i>			<i>01r</i>	\ddot{q}		
F4	<i>nul</i>			F5	<i>nul</i>			F6	<i>nul</i>		
<i>0fr</i>	\dot{q}	<i>1fl</i>		\dot{q}	<i>1fl</i>	<i>1fl</i>		<i>1fl</i>	<i>1fl</i>	<i>1fl</i>	
\ddot{q}	<i>01l</i>			<i>01l</i>	<i>11l</i>			<i>11l</i>	<i>11l</i>		
F7	<i>nul</i>			F8	<i>nul</i>			F9	<i>nul</i>		
<i>1fl</i>	<i>1fl</i>	<i>0fl</i>		<i>1fl</i>	<i>0fl</i>	<i>0fl</i>		<i>0fl</i>	<i>0fl</i>	<i>0fl</i>	
<i>11l</i>	<i>11l</i>			<i>11l</i>	<i>01l</i>			<i>01l</i>	<i>01l</i>		
	F10	<i>nul</i>		F11	<i>nul</i>						
	<i>0fl</i>	<i>0fl</i>	<i>bl</i>	<i>0fl</i>	<i>bl</i>	<i>nul</i>					
	<i>01l</i>	<i>01l</i>		<i>01l</i>	<i>bl</i>						

На зарисовках F3-F5 \dot{q} обозначает начальное состояние головки МТ τ_3 , \ddot{q} — состояние в результате начального перехода. Вид зарисовок F3-F5 вытекает из второго утверждения леммы 4.

Зададим допустимые конфигурации последней строки.

	L1	<i>00r</i>		L2	<i>*0r</i>						
	<i>nul</i>	<i>01r</i>	<i>01r</i>	<i>*1r</i>	<i>*1r</i>	<i>*1r</i>					
	<i>nul</i>	<i>nul</i>		<i>nul</i>	<i>nul</i>						
L3	<i>*0r, \ddot{q}</i>			L4	<i>*0*, \ddot{q}</i>			L5	<i>*0l, \ddot{q}</i>		
<i>*1r</i>	<i>b1r</i>	\hat{q}		<i>*1r</i>	\hat{q}	<i>11l</i>		\hat{q}	<i>11l</i>	<i>b1l</i>	
<i>nul</i>	<i>nul</i>			<i>nul</i>	<i>nul</i>			<i>nul</i>	<i>nul</i>		
L6	<i>*0l</i>			L7	<i>00l</i>			L8	<i>bl</i>		
<i>*1l</i>	<i>*1l</i>	<i>*1l</i>		<i>01l</i>	<i>01l</i>	<i>bl</i>		<i>01l</i>	<i>bl</i>	<i>nul</i>	
<i>nul</i>	<i>nul</i>			<i>nul</i>	<i>nul</i>			<i>nul</i>	<i>nul</i>		

На зарисовках L3-L5 \hat{q} обозначает такое состояние МТ, что из него есть переход с сигналом остановки МТ (по нашему определению у МТ существует ровно одно состояние с сигналом остановки). При этом из третьего утверждения леммы 4 вытекает, что такой переход единственный и имеет вид $\delta(\hat{q}, 1) = \Lambda$. Состояние \ddot{q} на зарисовке L3 таково, что найдется $a \in E_3$, что $\delta(\ddot{q}, a) = (\hat{q}, b, 1)$. Состояние \ddot{q} на зарисовке L4 либо равно \hat{q} , либо таково, что найдется $a \in E_3$, что $\delta(\ddot{q}, a) = (\hat{q}, 1, 0)$. Состояние \ddot{q} на зарисовке L5 таково, что найдется $a \in E_3$, что $\delta(\ddot{q}, a) = (\hat{q}, b, -1)$. На зарисовках L3-L5 для случая, когда значение верхней ячейки не равно \ddot{q} , значение b подразумевается не ограниченным, то есть эквивалентным $*$ в смысле приведенной выше интерпретации с множествами.

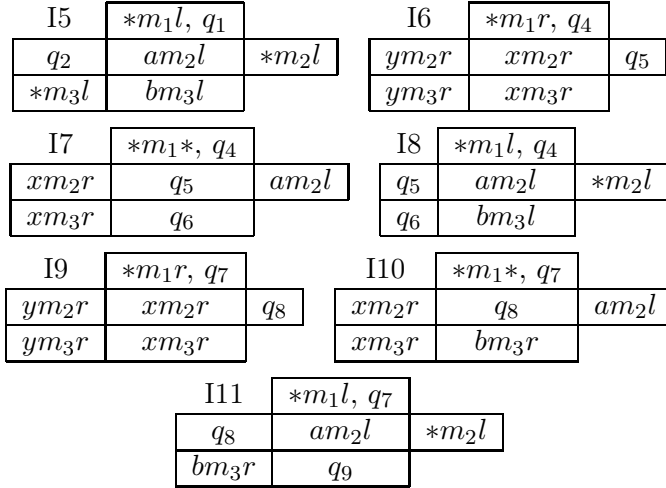
Зададим допустимые конфигурации боковых ячеек таблицы.

B1	$0m_1r$		B2	$0m_1l$		B3	bl		
	nul	$0m_2r$	$0m_2l$	$0m_2l$	bl		$0m_2l$	bl	nul
	nul	$0m_3r$		$0m_3l$	$0m_3l$		$0m_3l$	bl	

Здесь на зарисовке B2 допустимы следующие пары символов разметки $(m_2, m_3) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, на зарисовках B1 и B3 допустимы следующие тройки символов разметки $(m_1, m_2, m_3) \in \{(f, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Отметим, что подобное задание запрещает головке подходить на две клетки к правой границе таблицы и на одну клетку к левой границе, но при подходе на две клетки к левой нельзя менять значение ячейки с 0 на 1 (это сделано для упрощения системы допустимых конфигураций). Также отметим, что данные допустимые конфигурации не включают случая «угловых» ячеек — эти случаи были указаны в списках допустимых конфигураций первой и последней строки.

Зададим допустимые конфигурации внутренних ячеек таблицы.

I1	$*m_1r$		I2	$*m_1l$	
	ym_2r	xm_2r	$*m_2l$	xm_2l	$*m_2l$
	ym_3r	xm_3r	$*m_3l, q'$	xm_3l	
I3	$*m_1r, q_1$		I4	$*m_1*, q_1$	
	xm_2r	$*m_2r$	xm_2r	q_2	am_2l
	xm_3r	q_3	q_3	xm_3l	



Здесь зарисовки I1-I2 задают допустимые конфигурации, не содержащие головку на средней строке, I3-I5 задают переход головки на средней строке со сдвигом влево, I6-I8 задают переход без сдвига, I9-I11 задают переход со сдвигом вправо. Во всех зарисовках I1-I11 символы x и y используются для обозначения величины со значением из алфавита ленты E_3 , которая не меняется при переходе между строками. Символ $a \in E_3$ задает значение ячейки, над которой находится головка на средней строке, $b \in E_3$ — результат перехода головки. Значения состояния головки и значения ленты a и b связаны соотношениями

$$\delta(q_2, a) = (q_3, b, -1), \delta(q_5, a) = (q_6, b, 0), \delta(q_8, a) = (q_9, b, 1).$$

На состояния q', q_1, q_4, q_7 ограничений не накладывается, то есть они могут принимать любое значение из Q . Случай $\delta(\hat{q}, a) = \Lambda$ задается зарисовками I6-I8, при этом $q_5 = q_6 = \hat{q}, a = b = 1$. Символы разметки везде подразумеваются согласованными в соответствии с нумерацией строк, то есть $(m_1, m_2, m_3) \in \{(f, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Отметим, что из вида зарисовок I1-I2 вытекает, что головка МТ не может «исчезать» при переходе от строки к строке — иначе ячейка под головкой не будет удовлетворять ни одной зарисовке. Также из вида зарисовок следует, что рассогласование в символах разметки строки и относительного положения головки в паре ячеек $\alpha, \alpha + v, v \in V^+$ будет «видна» в любой ячейке β , для которой $\alpha \in V^\star(\beta)$ и $\alpha + v \in V^\star(\beta)$.

Будем называть две ячейки α и α' графика вычисления Γ с не пустыми значениями связанными, если либо $\alpha' \in V^+(\alpha)$, либо существует последовательность ячеек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, p \in \mathbb{N}$, что $\Gamma(\alpha_i) \neq nul$, $1 \leq i \leq p$ и $\alpha_1 \in V^+(\alpha), \alpha_2 \in V^+(\alpha_1), \dots, \alpha' \in V^+(\alpha_p)$. Будем обозначать отношение связности ячеек α и α' графика Γ через $\alpha \bowtie \alpha'(\Gamma)$ (либо просто $\alpha \bowtie \alpha'$, если понятно, о каком графике идет речь).

Лемма 5. *Для любого графика Γ отношение \bowtie является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность \bowtie вытекает из определения окрестности ячейки, а именно любая ячейка входит в свою окрестность.

Симметричность \bowtie вытекает из симметричности шаблона V^+ — то есть если $\alpha_1 \in V^+(\alpha_2)$, то и $\alpha_2 \in V^+(\alpha_1)$.

Докажем транзитивность. Пусть $\alpha \bowtie \alpha'$ и $\alpha' \bowtie \alpha''$. Из определения имеем три случая, разберем их по отдельности. Последовательность ячеек с не пустыми значениями из второго случая определения будем для краткости называть путем.

В первом обе пары ячеек попадают в шаблоны соседства друг друга. Тогда из α в α'' есть путь через промежуточную ячейку α' , то есть $\alpha \bowtie \alpha''$.

Во втором случае в одной из пар ячеек одна находится в непосредственной окрестности другой, а в другой паре ячейки соединены путем. Добавим к пути вершину α' (в начало, если непосредственная близость в первой паре, либо в конец, если непосредственная близость во второй), получим искомым путь из α в α'' .

В третьем случае обе пары ячеек соединены нетривиальными путями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_1}$, и $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{p_2}$. Построим путь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_1}, \alpha', \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{p_2}$. Он соединяет ячейки α и α'' , то есть $\alpha \bowtie \alpha''$.

Доказательство закончено.

Из леммы 5 вытекает, что множество всех ненулевых графиков можно однозначным образом разбить на классы эквивалентности относительно отношения \bowtie . Будем называть эти классы компонентами \bowtie связности. Блок ячеек B , являющийся компонентой \bowtie связности, будем называть локально корректным подграфиком графика вычисления Γ , если для любой ячейки $\alpha \in B$ график вычисления Γ является корректным в точке α (то есть состояние окрестности $V^\star(\alpha)$ описывается одной из зарисовок F1-F11, L1-L8, B1-B3, I1-I11).

Сформулируем лемму, которая свяжет локально корректные подграфы графов вычислений и таблицы конечных функционирований МТ τ_3 .

Лемма 6. Пусть B является локально корректным подграфом графика вычисления Γ . Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Существуют такие целые числа $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$, $x_2 - x_1 > 3$, $y_2 - y_1 > 3$, что

$$B = \{\alpha = (x, y) | x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}.$$

- 2) Существуют такие целые числа $w_l < w_r$, $s > 3$, $x_1 \leq w_l$, $x_2 \geq w_r$, $y_1 \leq y_2 - s$, что состояние подмножества B' блока B вида

$$B' = \{\alpha = (x, y) | w_l \leq x \leq w_r, y_2 - s \leq y \leq y_2\}$$

представляет из себя таблицу некоторого конечного функционирования S МТ τ_3 , причем начальная конфигурация представляет из себя унитарное слово с расположением головки над первой единицей.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. В силу того, что блок является конечным множеством, можно построить множество ячеек $B_f \subset B$, вторая координата которых является максимальной. Разобьем B_f на связанные компоненты $B_f^1, B_f^2, \dots, B_f^p$. Покажем, что каждая компонента B_f^i имеет вид:

$0fr$	$0fr$	\dots	$0fr$	\dot{q}	$1fl$	\dots	$1fl$	$0fl$	\dots	$0fl$	bl
-------	-------	---------	-------	-----------	-------	---------	-------	-------	---------	-------	------

Слева и сверху в окрестности ячейки самой левой ячейки будут находиться значения nul . Единственной зарисовкой, подходящей по значениям ячеек окрестности α , $\alpha + v_n$, $\alpha + v_w$, является F1, при этом из вида этой зарисовки вытекает, что вторая слева ячейка обязана иметь значение $0fr$. Далее, из вида множества зарисовок вытекает, что любая не крайняя ячейка со значением $0fr$ должна иметь левым соседом также $0fr$, правым соседом либо $0fr$ (зарисовка F2), либо \dot{q} (зарисовка F3). Так как блок B_f^i — конечное множество со всеми корректными ячейками, передвигаясь слева направо по строке, рано

или поздно должна возникнуть ячейка со значением \hat{q} . Ее окрестность определяется зарисовкой F4. Зарисовки F4-F9 подписывают, что после нее должна идти последовательность из как минимум двух ячеек со значением $1fl$. После них, в соответствии с зарисовками F7-F11, должна идти последовательность из минимум двух ячеек со значением $0fl$, заканчивающаяся ячейкой со значением bl . В соответствии с зарисовкой F11, ячейка со значением bl будет самой правой в последовательности и единственной в B_f^i .

Далее построим множество ячеек $B_l \subset B$, вторая координата которых является минимальной. Разобьем B_l на связанные компоненты $B_l^1, B_l^2, \dots, B_l^{i'}$. Аналогично первой строке, индукцией по значению первой координаты устанавливается, что компонента B_l^i имеет вид:

01r	01r	*1r	...	*1r	\hat{q}	11l	*1l	...	*1l	01l	01l	bl
-----	-----	-----	-----	-----	-----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

Далее, пусть B_f^1 и B_l^1 — компоненты связности B_f и B_l , содержащие ячейки с наименьшей первой координатой среди других компонент связности B_f и B_l . Покажем, что B_f^1 и B_l^1 отличаются друг от друга параллельным переносом по вертикали. Рассмотрим самую левую ячейку α множества B_f^1 . Ее окрестность обязана удовлетворять зарисовке F1, следовательно ее соседи $\alpha + v_s$ и $\alpha + v_{sw}$ должны иметь значения $01r$ и nul соответственно. Ячейка $\alpha + v_s$ имеет не пустое значение и связана с ячейкой α , следовательно, окрестность $\alpha + v_s$ тоже должна быть корректной конфигурацией. Из вида зарисовок F1 и F2 вытекает, что окрестность $\alpha + v_s$ имеет следующий вид.

			0fr			
nul	01r	01r				
?	?					

«Подходить» под такую окрестность может только зарисовка V1. Из вида V1 следует, что ячейка $(\alpha + v_s) + v_{sw}$ имеет значение nul , а ячейка $(\alpha + v_s) + v_s$ имеет значение $00r$. Продолжая далее, получим, что все ячейки вида $\alpha + 2 \cdot i \cdot v_s$, будут иметь значение $00r$, а ячейки вида $\alpha + (2 \cdot i + 1) \cdot v_s$ — значение $01r$. При этом их соседи слева будут иметь пустое значение, а соседи справа — не пустое. В силу конечности B эта индукция «вниз» по зарисовке V1 должна быть конечной, закончится она может исключительно зарисовкой L1. Обозначим ячейку, в которой это произошло, через α' .

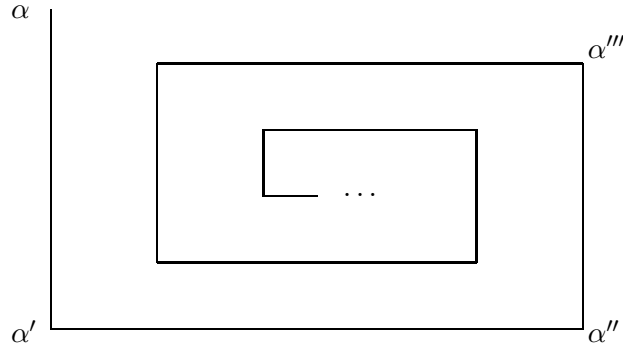
Заметим, что удовлетворение окрестности ячейки α' зарисовке L1 влечет, что правее α' строка ненулевых ячеек имеет вид, некоторого компонента B_i^j . Действительно, индукцией «вправо» убеждаемся, что снизу могут быть только ячейки со значением nul (так как ячейка $\alpha' + v_e$ видит по вектору v_{sw} соседа $\alpha' + v_s$ ячейки α' , а его значение — nul). Из этого вытекает, что правее α' могут быть только ячейки с окрестностями из зарисовок L1-L8, а они образуют нужный вид. Обозначим самую правую связанную с α' ячейку в получающейся строке со значением bl через α'' . Отметим, что ячейка $\alpha'' + v_n$ имеет значение bl (зарисовка L8 относительно α''), ячейка $(\alpha'' + v_n) + v_w$ имеет значение $00l$ (зарисовка L7 относительно $\alpha'' + v_w$). Далее, окрестность ячейки $\alpha'' + v_n$ может удовлетворять только зарисовке В3. Ячейки, которые находятся над α'' , связаны с α'' и имеют значение bl , могут удовлетворять только зарисовкам В3 или F11, при этом зарисовке F11 может удовлетворять только самая верхняя ячейка, обозначим ее через α''' .

Заметим, что вторая координата ячейки α''' не может превосходить вторую координату ячейки α — так как множество B_f^1 есть подмножество множества B_f , которое содержит ячейки с максимальными вторыми координатами. Покажем, что вторые координаты у ячеек α и α''' совпадают.

В дальнейших рассуждениях нам будет удобно строить отрезки локально корректных ячеек, начинающиеся и заканчивающиеся с конфигураций окрестностей, определяемыми зарисовками F1, F11, L1, L8, параллельные осям координат. При этом окрестности внутренних ячеек отрезка, построенного в направлении справа налево, будут удовлетворять ограничениям F10-F2, сверху вниз — В1, справа налево — L2- L7, снизу вверх — В3. Построения эти будут основаны на аналогичных уже проведенным рассуждениях при построении последовательности точек α' , α'' , α''' .

Допустим, что это не так, и ячейка α''' имеет вторую координату меньше, чем у α . Выпустим из α''' влево отрезок с концом в точке α_1 . Заметим, что она не может достигнуть отрезка $[\alpha, \alpha']$ — так как окрестность точки их соприкосновения не будет удовлетворять никакой зарисовке. Далее выпустим отрезок из α_1 вниз в точку α_2 . Он также не может достигнуть отрезка $[\alpha', \alpha'']$. Далее выпустим отрезок направо в точку α_3 , этот отрезок не может достигнуть отрезка

$[\alpha'', \alpha''']$. Продолжая этот процесс, получим спиралевидную конфигурацию следующего вида.



В силу того, что длина строящихся отрезков будет уменьшаться, в некоторый момент следующий отрезок построить будет нельзя (так как их длины — целые числа). Следовательно, такая спиралевидная конфигурация не может быть корректной, что влечет невозможность неравенства вторых координат ячеек α и α''' .

Покажем, что самой правой ячейкой блока B_f^1 является α''' . Допустим, что это не так. Следовательно, можно из α''' налево выпустить отрезок в точку α_1 , потом выпустить отрезок вниз в α_2 , и так далее. Снова возникнет спиралевидная конфигурация, которая не может являться корректной.

В результате приведенных рассуждений мы получили прямоугольную конфигурацию вида:

0fr	...	0fr	0fr	\hat{q}	1fl	...	1fl	0fl	...	0fl	0fl	bl
01r	...	01r	\hat{q}	01l	11l	...	11l	01l	...	01l	01l	bl
00r	00l	bl
01r	01l	bl
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
01r	*1r	*1r	...	*1r	\hat{q}	11l	*1l	...	*1l	01l	01l	bl

Обозначим $\alpha = (x_1, y_2)$, $\alpha' = (x_1, y_1)$, $\alpha'' = (x_2, y_1)$, $\alpha''' = (x_2, y_2)$. В силу того, что комбинация зарисовок F1, F2, F3 не может привести к строке значений короче 3-х, справедливо неравенство $x_2 - x_1 > 3$. Неравенство $y_2 - y_1 > 3$ будет выполнено в силу вида зарисовки B1 по аналогичным соображениям.

Пусть $B^\square = \{(x, y) | x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$. Отметим, что значения всех ячеек из блока $V^+(B^\square) \setminus B^\square$ равны nul . Следовательно, в силу связанности блока B , имеем $B \subseteq B^\square$.

Покажем, что $B = B^\square$. В силу того, что B является локально корректным подграфиком графика Γ , блок $V^+(B) \setminus B$ может содержать ячейки только с нулевыми значениями. Следовательно, верно одно из двух — либо $B = B^\square$, либо найдется ячейка $\beta \in B^\square \cap V^+(B)$, что $\Gamma(\beta) = nul$. Покажем, что вторая альтернатива не возможна.

Предположим противное, тогда множество $B' = (V^+(B) \setminus B) \cap B^\square$ не является пустым. Возьмем такую ячейку $\beta' \in B'$, что ее первая координата минимальна среди всех ячеек из B' . Отметим, в силу проведенных построений ячейка β' не может находиться на границе B^\square , то есть для ее координат (x', y') верно $x_1 < x' < x_2, y_1 < y' < y_2$. В силу того, что $\beta' \in V^+(B) \setminus B$, найдется ячейка $\alpha \in V^+(\beta')$, $\alpha \in B$. Ячейка α относительно β' может располагаться в четырех позициях, покажем что любое из этих положений приводит к противоречию.

- 1) $\alpha = \beta' + v_n$. Состояние окрестности α может удовлетворять зарисовкам L1-L8. В случае, если состояние окрестности α удовлетворяет L1, то состояние ячейки $\alpha + v_w$ равно nul , она принадлежит B' и имеет меньшую первую координату, чем β' . В случае, если α удовлетворяет L2-L8, ячейка $\alpha + v_w \in B$, ячейка $\beta' + v_w \in B'$, состояние $\beta' + v_w$ равно nul . В обоих случаях имеем противоречие с выбором β' как ячейки с минимальной первой координатой.
- 2) $\alpha = \beta' + v_s$. Состояние окрестности α может удовлетворять зарисовкам F1-F11. В случае F1 ячейка $\alpha + v_w \in B'$ имеет значение nul . В случаях F2-F11 ячейка $\alpha + v_w \in B$, состояние ее окрестности может удовлетворять только зарисовкам F1-F11, которые влекут, что состояние $\beta' + v_w \in B'$ равно nul . Оба варианта противоречат минимальности первой координаты β' .
- 3) $\alpha = \beta' + v_w$. Под состояние окрестности α подходят зарисовки F11, L8, B2. Вариант F11 (L8) влечет значение ячеек $\alpha + v_n \in B'$ ($\alpha + v_s \in B'$) равное nul , что противоречит минимальности первой координаты β' . В случае B2 в последовательности ячеек над α найдется ячейка $\alpha_1 \in B$, окрестность которой удовлетворяет F11, соответственно $\alpha_1 + v_n \in B'$ будет иметь первую координату меньше β' .

- 4) $\alpha = \beta' + v_e$. Рассмотрим последовательность ячеек с координатами (x_1, y') , $(x_1 + 1, y')$, \dots , $(x', y') = \beta'$. На этом отрезке первая ячейка (x_1, y') принадлежит множеству B , последняя (x', y') не принадлежит. Соответственно, найдется x , $x_1 < x < x'$, что $(x, y') \in B$, $(x + 1, y') \in B'$. В случае, если $x < x' - 1$ имеем противоречие с выбором β' . Следовательно, $x = x' - 1$, следовательно $\beta' + v_w \in B$ — а этот случай уже разобран.

Следовательно, имеем $B = B^\square$, и первое утверждение леммы доказано. Установим справедливость второго утверждения.

Построенный выше блок B_f^1 задает начальную конфигурацию МТ, у которой на ленте записано слово из как минимум двух единиц и головка МТ находится над самой левой единицей, что и требуется по условию. Покажем по индукции по i , что все блоки ячеек вида $B_i^1 = \{(x_1, y_2 - i), (x_1 + 1, y_2 - i), \dots, (x_2, y_2 - i)\}$ задают, с точностью до «полей» и сдвига, строки таблицы вычисления МТ τ_3 , при этом последовательные строки задают последовательные конфигурации МТ τ_3 .

База индукции. Покажем, что утверждение верно для $i = 1$. Рассмотрим окрестности ячеек блока B_f^1 . Все они должны удовлетворять зарисовкам F1-F11, что определяет значения ячеек блока B_1^1 следующим образом (на рисунке первая строка — B_1^1 , вторая — B_1^1).

0fr	0fr	...	0fr	0fr	\dot{q}	1fl	...	1fl	0fl	...	0fl	bl
01r	01r	...	01r	\ddot{q}	01l	11l	...	11l	01l	...	01l	bl

Действительно, ячейка $\alpha \in B_f^1$, находящаяся правее головки как минимум на две ячейки, удовлетворяет либо зарисовке F1, либо F2. Эти зарисовки определяют значения ячейки $\alpha + v_s \in B_1$. Аналогично, ячейки, находящиеся правее головки как минимум на две ячейки, посредством зарисовок F6-F11, определяют значения ячеек под ними. Пусть (z, y_2) — ячейка, содержащая значение \dot{q} . Ее окрестность удовлетворяет зарисовке F4, которая определяет значение ячеек $(z - 1, y_2 - 1)$ и $(z, y_2 - 1)$. Ячейка $(z + 1, y_2)$, удовлетворяющая ограничению F5, определяет значение ячейки $(z + 1, y_2 - 1)$. Значения всех ячеек блока B_1^1 определены и соответствуют искомым.

Для $i = 1$ доказываемое утверждение верно, предположим, что оно верно для $i \in \mathbb{Z}$, $0 < i < y_2 - y_1$. Покажем что оно верно для $i + 1$.

Аналогично доказательству для первой строки, рассмотрим окрестности ячеек строки B_i^1 . Окрестности ячеек $(x_1, y_2 - i)$, $(x_2 - 1, y_2 - i)$, $(x_2, y_2 - i)$ должны удовлетворять зарисовкам В1, В2, В3 соответственно. Это определяет значения ячеек $(x_1, y_2 - i - 1)$, $(x_2 - 1, y_2 - i - 1)$, $(x_2, y_2 - i - 1)$. Оставшиеся ячейки из B_i^1 , находящиеся правее ячейки с головкой МТ и вне зоны ее видимости относительно V^\star определяют значения ячеек блока B_{i+1}^1 , под ними посредством зарисовки П1. Ячейки из B_i^1 левее головки вне зоны ее видимости определяют значения ячеек под ними с помощью зарисовки П2. Ячейки, в окрестности которых находится головка, определяют значения ячеек под ними посредством зарисовок П3-П5, П6-П8, П9-П11 в зависимости от направления движения головки при переходе, кодируемом состояниями ячеек $(z, y_2 - i)$ и $(z + 1, y_2 - i)$.

То, что МТ остановится в процессе кодируемого функционирования, гарантируется видом зарисовок последней строки таблицы — головка в них может находиться только в переходе с сигналом остановки. При этом переход с сигналом остановки может случиться раньше последней строки, тогда кодируемые конфигурации МТ будут повторяться начиная с момента остановки.

Заметим, что заданный локально корректным подграфиком процесс функционирования может содержать лишние «поля» слева и справа, которые представляют из себя ячейки ленты МТ с нулевым состоянием, которые головка МТ в процессе своего функционирования не посетила.

Соответственно, если отбросить от локально корректного графика B боковые поля (вместе со столбцом из символов bl) и строки с повторяющейся конфигурацией с сигналом остановки, получим второе утверждение леммы.

Доказательство леммы 6 закончено.

Для краткости конечные функционирования МТ τ_3 , начинающиеся с конфигурации ленты с унитарным словом из u единиц ($u > 2$) и расположением головки над самой левой ячейкой со значением 1 на ленте, будем называть u -инициальными.

Сведение проблемы остановки МТ τ_3 к проблеме распознавания обратимости КА будет осуществлено следующим образом. По числу $u \in \mathbb{N}$, $u > 1$, будет строиться КА, который будет являться не обрати-

мым тогда и только тогда, когда существует конечное u -инициальное функционирование МТ τ_3 .

Соответственно, далее нам понадобится конструкция, позволяющая задавать число единиц в верхней строке локально корректного подграфика вычисления. Мы будем делать это с помощью техники, аналогичной уже используемой при задании локально корректных подграфиков, то есть используя зарисовки окрестностей ячеек относительно некоторого шаблона соседства. Однако в данном случае будут перечисляться не просто допустимые конфигурации, а импликации вида «если ячейки M_1 окрестности имеют значения X_1 , то ячейки окрестности M_2 имеют значения X_2 .»

Будем обозначать через V^- шаблон соседства из двух векторов (v_w, v_e) . Обозначим через v_e^u вектор с координатами $(u, 0)$, $u \in N$, $u > 2$. Будем обозначать через $V_u^{\star-}$ шаблон соседства $(v_e, v_s, v_{sw}, v_w, v_n, v_e^u)$.

В качестве посылки импликации будем задавать значение окрестности ячейки $V^-(\alpha)$ ячейки α , в качестве следствия — значение ячейки $\alpha + v_e^u$. Будем изображать подобные импликации зарисовками следующего вида.

$$\text{NUM} \quad \boxed{X_w \mid X \mid X_e \mid \mid X_u}$$

Где NUM — имя зарисовки; X — значение ячейки α ; X_e, X_w, X_u — значения ячеек $\alpha + v_e, \alpha + v_w, \alpha + v_e^u$ соответственно. Для значений ячеек будем использовать ту же символику, что и для локально корректных графиков.

Приведем список допустимых зарисовок импликаций S1-S3.

$$\begin{array}{l} \text{S1} \quad \boxed{0fr \mid 0fr \mid \dot{q} \mid \mid 1fl} \\ \text{S2} \quad \boxed{0fr \mid \dot{q} \mid 1fl \mid \mid 1fl} \\ \text{S3} \quad \boxed{\dot{q} \mid 1fl \mid 1fl \mid \mid 0fl} \end{array}$$

Локально корректный подграфик B графика вычисления Γ будем называть u -инициальным, если для любой ячейки $\alpha \in B$, набор значений окрестности $V^-(\alpha)$ которой $(\Gamma(\alpha + v_w), \Gamma(\alpha), \Gamma(\alpha + v_e))$ совпадает со значениями X_w, X, X_e некоторой зарисовки S из списка S1-S3, значение $\Gamma(\alpha + v_e^u)$ ячейки $\alpha + v_e^u$ совпадает с значением X_u зарисовки S.

Лемма 7. Пусть машина Тьюринга τ_3 имеет u -инициальное конечное функционирование ($u > 2$). Тогда существует график вычисления Γ , множество ячеек с непустыми значениями которого представляют из себя u -инициальный локально корректный подграфик.

Доказательство. Пусть МТ τ_3 имеет конечное u -инициальное функционирование C . Зададим его таблицей вычисления $T(C)$. Добавим к $T(C)$ слева и справа поля с нулевыми значениями ленты МТ ширины 2, справа добавим столбец из символов bl и разместим получившуюся конфигурацию в ячейках блока вычисления $\Gamma(C)$

$$B(C) = \{(x, y) | W_l(C) - 3 \leq x \leq W_r(C) + 3, -\hat{s}(C) \leq y \leq 0\},$$

где $\hat{s}(C)$ — наименьшее нечетное число, не меньшее $s(C)$. Все ячейки α , не входящие в $B(C)$, определим значениями nul . По построению $B(C)$ будет локально корректным подграфиком вычисления $\Gamma(C)$.

Покажем, что $B(C)$ будет u -инициальным. По построению посылкам зарисовок импликаций S1-S3 могут удовлетворять только ячейки $\beta \in B(C)$, $\beta = (x, y)$, y которых вторая координата y равна нулю, и в V^- окрестности которых находится головка. Всего таких ячеек в $B(C)$ три. Самая левая из них будет удовлетворять зарисовке S1, средняя — зарисовке S2, правая — зарисовке S3. Доказательство леммы закончено.

Отметим, что доказательство «в лоб» утверждения, обратного лемме 7 — затруднительно. Проблема связана с тем наблюдением, что из окрестности головки на первой строке по вектору v_e^u может быть достижима ячейка, не принадлежащая к той же компоненте \bowtie связности, что рассматриваемый локально корректный подграфик. Однако, если рассматривать слабую связность с учетом достижимости по вектору v_e^u посредством зарисовок S1-S3, то доказательство проходит, — самая правая компонента \bowtie связности будет либо не локально корректной, либо не удовлетворять зарисовкам S1-S3. Проведем необходимые формальные рассуждения.

Пусть задан график вычисления Γ и задана пара компонент \bowtie связности B_1 и B_2 . Будем говорить, что B_2 непосредственно S- u достижима из B_1 , если в B_1 найдется тройка соседних ячеек α , $\alpha + v_w$, $\alpha + v_e$ таких, что выполнены следующие условия.

- 1) Ячейки $\alpha + v_e^u$, $\alpha + v_w + v_e^u$, $\alpha + v_e + v_e^u$ принадлежат блоку B_2 .

- 2) Значения $\Gamma(\alpha + v_w + v_w)$, $\Gamma(\alpha + v_w)$, $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha + v_w + v_e^u)$ удовлетворяют зарисовке S1.
- 3) Значения $\Gamma(\alpha + v_w)$, $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha + v_e)$, $\Gamma(\alpha + v_e^u)$ удовлетворяют зарисовке S2.
- 4) Значения $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha + v_e)$, $\Gamma(\alpha + v_e + v_e)$, $\Gamma(\alpha + v_e + v_e^u)$ удовлетворяют зарисовке S3.

Будем обозначать факт непосредственной S - u достижимости B_2 из B_1 отношением $B_1 \rightarrow B_2$. Будем называть компоненту \bowtie связности B' S - u достижимой из компоненты \bowtie связности B (обозначение $B \Rightarrow B'$), если либо $B \rightarrow B'$, либо найдется такая последовательность компонент \bowtie связности B_1, B_2, \dots, B_p , $p \in \mathbb{N}$, что $B \rightarrow B_1, B_1 \rightarrow B_2, \dots, B_p \rightarrow B'$.

Будем называть последовательность компонент \bowtie связности B_1, B_2, \dots, B_p S - u максимальной цепью, если $B_1 \rightarrow B_2, B_2 \rightarrow B_3, \dots, B_{p-1} \rightarrow B_p$, и не существует компоненты \bowtie связности B' , что $B_p \rightarrow B'$.

Лемма 8. *Для любого графика Γ из того, что все элементы некоторой S - u максимальной цепи B_1, B_2, \dots, B_p , $p \in \mathbb{N}$, являются u -инициальными локально корректными подграфиками, следует, что $p = 1$, то есть цепь состоит из одного элемента B_1 .*

Доказательство. Рассмотрим самый старший элемент цепи B_p . По условию леммы он является локально корректным подграфиком графика Γ , следовательно по лемме 6 он представляет из себя прямоугольный блок со значением вида.

$0fr$	$0fr$	\dots	$0fr$	$0fr$	\hat{q}	$1fl$	\dots	$1fl$	$0fl$	\dots	$0fl$	bl
$01r$	$01r$	\dots	$01r$	\hat{q}	$01l$	$11l$	\dots	$11l$	$01l$	\dots	$01l$	bl
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$01r$	$01r$	$*1r$	$*1r$	\dots	$*1r$	\hat{q}	$11l$	$*1l$	\dots	$*1l$	$01l$	bl

Рассмотрим ячейку первой строки α , значение которой равно \hat{q} . Значения окрестностей $V^-(\alpha)$, $V^-(\alpha + v_w)$, $V^-(\alpha + v_e)$ ячеек α , $\alpha + v_w$, $\alpha + v_e$ удовлетворяют посылкам зарисовок S2, S1 и S3 соответственно, следовательно, в силу того, что по условию B_p является локально корректным u -инициальным подграфиком, значения ячеек $\alpha + v_e^u$, $\alpha + v_w + v_e^u$, $\alpha + v_e + v_e^u$ должны равняться $1fl$, $1fl$ и $0fl$ соответственно.

В силу того, что B_p является старшим элементом S - u максимальной цепи, ячейки $\alpha + v_e^u$, $\alpha + v_w + v_e^u$, $\alpha + v_e + v_e^u$ принадлежат блоку B_p (если это не так — возникает S - u достижимая из B_p компонента связности B' , что противоречит максимальной цепи).

Предположим, что $p > 1$. Рассмотрим блок B_{p-1} . В силу того, что $B_{p-1} \rightarrow B_p$, должны существовать ячейки α' , $\alpha' + v_w$, $\alpha' + v_e$, в блоке B_{p-1} такие, что $\alpha' + v_e^u$, $\alpha' + v_w + v_e^u$, $\alpha' + v_e + v_e^u$ лежат в блоке B_p и их значения равны $1fl$, $1fl$ и $0fl$ соответственно. Однако, единственной тройкой ячеек в блоке B_p с таким расположением и такими значениями являются построенные выше $\alpha + v_e^u$, $\alpha + v_w + v_e^u$, $\alpha + v_e + v_e^u$, а для них α , $\alpha + v_w$, $\alpha + v_e$ лежат в блоке B_p . Получили противоречие. Лемма доказана.

Пусть задан график Γ и S - u максимальная цепь, состоящая из одного элемента B , который является локально корректным u -инициальным подграфиком. Будем называть такой элемент B замкнутым локально корректным u -инициальным подграфиком.

Лемма 9. *Машина Тьюринга τ_3 имеет u -инициальное конечное функционирование ($u > 2$) тогда и только тогда, когда существует график вычисления Γ с замкнутым локально корректным u -инициальным подграфиком.*

Доказательство. Необходимость. Пусть МТ τ_3 имеет u -инициальное конечное функционирование. В соответствии с леммой 7 можно предъявить график вычисления Γ , множество ненулевых ячеек B которого будет локально корректным u -инициальным подграфиком. Последовательность из одного элемента B будет S - u максимальной цепью, а B — искомым замкнутым локально корректным u -инициальным подграфиком.

Достаточность. Пусть задан график Γ с замкнутым локально корректным u -инициальным подграфиком B . По утверждению 2 леммы 6 можно построить прямоугольный подблок B' блока B , который представляет из себя таблицу некоторого конечного функционирования C МТ τ_3 . Покажем, что функционирование C является u -инициальным, то есть, что его стартовая конфигурация является унитарным словом из u единиц.

Заметим, что первая строка B' будет иметь следующий вид ($L, u' \in \mathbb{N}, R \in \mathbb{N}_0$).

$$\underbrace{0fr\ 0fr\ \dots\ 0fr}_{L}\ \dot{q}\ \underbrace{1fl\ 1fl\ \dots\ 1fl}_{u'}\ \underbrace{0fl\ 0fl\ \dots\ 0fl}_{R}$$

Обозначим ячейку, состояние которой равно \dot{q} , через α . В силу того, что B является локально корректным u -инициальным подграфом, значение ячеек $\alpha + v_w + v_e^u, \alpha + v_e^u, \alpha + v_e + v_e^u$ должно равняться $1fl, 1fl, 0fl$ соответственно. В силу того, что B — старший элемент цепи, $\alpha + v_w + v_e^u, \alpha + v_e^u, \alpha + v_e + v_e^u \in B$. Так как блок $B \setminus B'$ не может содержать ячеек со значениями $1fl$, ячейки $\alpha + v_w + v_e^u, \alpha + v_e^u$ лежат в B' . Значение окрестности ячейки α удовлетворяет зарисовке S2, следовательно $u' \geq u$. Значение окрестности ячейки $\alpha + v_e$ удовлетворяет зарисовке S3, следовательно $u' < u + 1$. Из двух последних неравенств имеем $u = u'$.

Доказательство леммы закончено.

Далее мы будем связывать факт существования графика вычисления Γ с S - u максимальной цепью, все элементы которой являются u -инициальными локально корректными подграфами, с реализуемостью в некоторой конфигурации КА вырожденной системы линейных уравнений над полем \mathbb{Z}_2 .

«Укладку» систем линейных уравнений на графики вычислений будем осуществлять с помощью языка ориентирующих локальных ограничений [5]. Однако, для упрощения изложения, нам будет удобно связывать использовавшиеся выше зарисовки для задания таких ограничений, а также будет использоваться другой шаблон соседства. Приведем модифицированный под текущее доказательство вариант терминологии.

Будем говорить, что ячейка α графика Γ с не пустым и не дефектным значением является локально корректной, если значение ее окрестности $V^\star(\alpha)$ удовлетворяет одной из зарисовок F1-F11, L1-L8, B1-B3, I1-I11. Будем называть локально корректную ячейку α графика Γ локально S - u корректной, если из того, что набор значений окрестности $V^-(\alpha)$ ячейки $(\Gamma(\alpha + v_w), \Gamma(\alpha), \Gamma(\alpha + v_e))$ совпадает со значениями X_w, X, X_e некоторой зарисовки S из списка S1-S3, следует что значение $\Gamma(\alpha + v_e^u)$ ячейки $\alpha + v_e^u$ совпадает со значением X_u зарисовки S . Заметим, что компонента \boxtimes связности B является

локально корректным u -инициальным подграфиком тогда и только тогда, когда все ее ячейки являются локально S - u корректными (фактически это переформулировка определения локально корректного u -инициального подграфика).

Назовем ориентацией ячейки α графика Γ отображение Δ во множество векторов $D = \{0, v_s, v_w, v_n, v_e, v_e^u\}$, построенное следующим образом.

- $\Delta(\alpha, \Gamma) = 0$, если ячейка α не является локально S - u корректной.
- $\Delta(\alpha, \Gamma) = v_s$, если окрестность ячейки α в Γ удовлетворяет зарисовкам F11 или B3.
- $\Delta(\alpha, \Gamma) = v_w$, если окрестность ячейки α в Γ удовлетворяет зарисовкам F6, F7, L2-L8, или I1-I11 при $m_1 = 1$, или B2 при $m_2 = 1$.
- $\Delta(\alpha, \Gamma) = v_n$, если окрестность ячейки α в Γ удовлетворяет зарисовкам L1, или B1 при $m_2 = 1$, или B2 при $m_2 = 0$.
- $\Delta(\alpha, \Gamma) = v_e$, если окрестность ячейки α в Γ удовлетворяет зарисовкам F1-F3, F8-F10, I1-I11 при $m_1 = 0$, или B1 при $m_2 = 0$.
- $\Delta(\alpha, \Gamma) = v_e^u$, если окрестность ячейки α в Γ удовлетворяет зарисовкам F4, F5 (что влечет удовлетворение импликациям S2, S3).

Ориентация строится так, чтобы индуцировать на конфигурации, состоящей из одного локально корректного u -инициального подграфика «векторное поле» вида, показанного на рисунке 1.

Далее мы будем использовать терминологию, принятую в теории графов. Определения используемых терминов можно найти, например, в книге [6].

Пусть задан график вычисления Γ . Узором $G(\Gamma)$ назовем ориентированный граф, вершинами которого являются все локально S - u корректные ячейки α графика Γ , а ребра соответствуют ориентациям ячеек — из вершины α' в вершину α идет ребро тогда и только тогда, когда $\alpha + \Delta(\alpha, \Gamma) = \alpha'$. Отметим, что в силу конечности множества непустых ячеек в графике вычисления Γ узор $G(\Gamma)$ является конечным графом.

Проанализируем структуру узора для корректных таблиц вычисления.

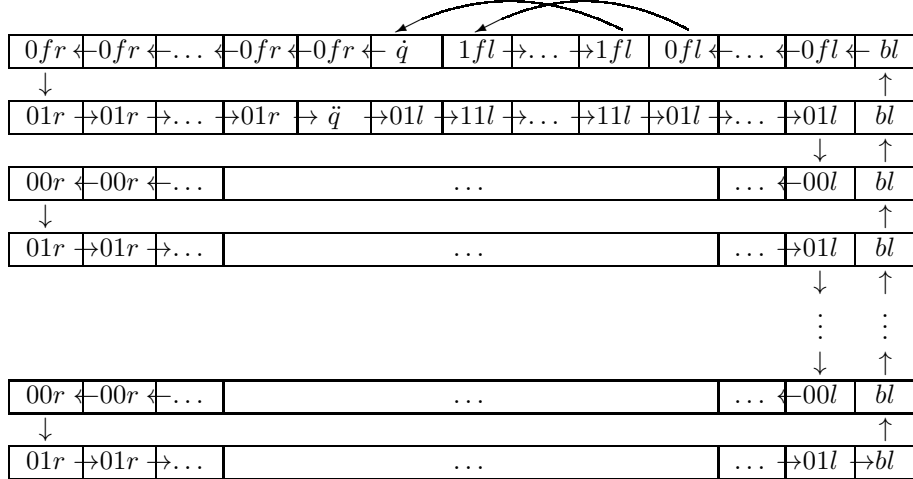


Рис. 1. Вид ориентации локально корректного u -инициального подграфика.

Лемма 10. Пусть $MT \tau_3$ имеет конечное u -инициальное функционирование. Тогда найдется график вычисления Γ , узор $G(\Gamma)$ которого представляет из себя ориентированный цикл, при этом множество вершин $G(\Gamma)$ совпадает с множеством всех ненулевых ячеек Γ .

Доказательство. В силу леммы 9 из наличия у машины Тьюринга τ_3 конечного u -инициального функционирования следует существование графика вычисления Γ с замкнутым локально корректным u -инициальным подграфиком B . В силу леммы 6 этот подграфик имеет вид прямоугольной таблицы вычисления с добавленными полями. Ориентация множества всех ячеек B будет иметь вид, изображенный на рисунке 1, следовательно соответствующая ей компонента связности узора $G(\Gamma)$ будет циклом.

В силу определения ориентации Δ граф $G(\Gamma)$ не имеет петель, и в каждую его вершину входит не более одного ребра. Задачей дальнейшего изложения будет анализ структуры возникающих графов $G(\Gamma)$.

Лемма 11. Пусть задан график вычисления Γ . Пусть α — вершина узора $G(\Gamma)$. Тогда существует не более одной вершины узора α' , что из α в α' идет ребро, такое что $\Delta(\alpha', \Gamma) \in \{v_e, v_s, v_w, v_n\}$.

Доказательство. Предположим противное: нашлись две вершины α' и α'' , в которые из α ведут ребра, то есть выполняется

$$\alpha' + \Delta(\alpha', \Gamma) = \alpha = \alpha'' + \Delta(\alpha'', \Gamma).$$

Заметим, что случай $\Delta(\alpha', \Gamma) = v_s$ не возможен — он влечет равенства $G(\alpha) = G(\alpha') = bl$. Из ячейки со значением bl может быть только переход по зарисовке F10, которая влечет $\alpha'' = \alpha - v_e$, $\Gamma(\alpha'' + v_n) = nul$, следовательно, для окрестности ячейки α' имеем $\Gamma(\alpha' + v_w) = nul$, $\Gamma(\alpha' + v_s) = bl$ — противоречие с локальной корректностью α' . Аналогично не возможен случай $\Delta(\alpha'', \Gamma) = v_s$.

Далее, заметим, что случай $\Delta(\alpha', \Gamma) = v_n$ не возможен. Он возможен при соответствии окрестности α' зарисовкам F1, B1 или B2.

- В случае зарисовок F1 и B1 значение $\Gamma(\alpha) = 01r$, $\Gamma(\alpha + v_w) = nul$, — то есть $\Delta(\alpha'', \Gamma)$ может быть равен только v_e , а в ячейку со значением $01r$ не может быть такого перехода по ориентации.
- В случае зарисовки B2 $\Gamma(\alpha) = 00l$, $\Gamma(\alpha') = 01l$, $\Gamma(\alpha' + v_e) = bl$, $\Gamma(\alpha + v_{sw}) = 00l$. Следовательно, единственное возможное значение $\Delta(\alpha'', \Gamma)$ есть v_w и значение ячейки $\Gamma(\alpha'') = 00l$. Но тогда ячейка α'' — не локально корректная, так как $\Gamma(\alpha'' + v_w) = 001$, $\Gamma(\alpha'' + v_n) = bl$.

Аналогично не возможен случай $\Delta(\alpha'', \Gamma) = v_n$.

Далее, остается случай $\Delta(\alpha', \Gamma) = v_e$, $\Delta(\alpha'', \Gamma) = v_w$. Из равенства $\Delta(\alpha', \Gamma) = v_e$, следует, что либо ячейки α и α' принадлежат строке с разметкой четности, равной единице, либо значение α равно $1fl$.

- В случае $\Gamma(\alpha) = 1fl$ имеем $\Gamma(\alpha'') \in \{0fl, 1fl\}$, что противоречит равенству $\Delta(\alpha'', \Gamma) = v_w$.
- В случае, когда ячейки α и α' принадлежат строке с нечетным номером, хотя бы в одной из них должно лежать значение вида $x1d$. В случае, если $\Gamma(\alpha)$ имеет такой вид, значение $\Delta(\alpha'', \Gamma) = v_w$ не возможно. В случае, если $\Gamma(\alpha) \in Q$, из того, что $\Delta(\alpha'', \Gamma) = v_w$, вытекает, что $\Gamma(\alpha)$ имеет вид $x0d$ — противоречие с корректностью разметки в точке α .

Доказательство леммы закончено.

К сожалению, утверждение о том, что степень исхода любой вершины узора равна единице, не является верным. Контрпримером является случай ячейки α с состоянием $1fl$, из которой могут выходить

ребра по двум направлениям $-v_e^u$ и $-v_w$. Это наблюдение вместе с утверждением леммы 11 позволяет утверждать, что возможные степени исхода вершин графа узора могут быть равны нулю, единице или двойке.

Лемма 12. *Для конечного слабо связного ориентированного графа без кратных ребер и петель, у любой вершины которого не более двух исходящих ребер и не более одного входящего ребра, верны следующие утверждения.*

- 1) *Если в графе есть простой цикл, то он является ориентированным циклом.*
- 2) *Рассмотрим граф, содержащий простой цикл. Если есть ребро, которое не принадлежит циклу, но инцидентно вершине этого цикла, то такое ребро должно исходить из вершины цикла.*
- 3) *Если в графе есть простая цепь, у которой одна из концевых вершин имеет в качестве исходящего ребра ребро цепи, то она является ориентированной цепью.*
- 4) *В графе не может быть более одного простого цикла.*
- 5) *Любой связный подграф, который не содержит циклов, представляет собой дерево, ориентированное от корня.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы от противного. Предположим, что простой цикл не является ориентированным, тогда существуют два ребра, которые ведут в одну вершину. Это противоречит условию леммы, следовательно наше предположение не верно.

Справедливость второго утверждения леммы следует из того, что по доказанному первому утверждению леммы любая вершина цикла уже имеет одно исходящее и одно входящее в нее ребро, поэтому третье, инцидентное вершине цикла ребро, может быть только исходящим.

Третье утверждение леммы верно в силу того, что у вершин графа может быть не более одного входящего в них ребра, поэтому ребро, выходящее из концевой вершины, определяет ориентацию следующего ребра простой цепи и так далее, пока не будет рассмотрено ребро, ведущее в другую концевую вершину.

Для доказательства от противного четвертого утверждения леммы необходимо рассмотреть два случая: когда два простых цикла имеют общие вершины, и когда общих вершин нет. В первом случае в подграфе, который состоит из общих вершин и ребер простых циклов, компоненты связности либо состоят из одной вершины, либо являются простой ориентированной цепью. Если есть компонента связности, состоящая только из одной вершины, то этой вершине инцидентно четыре ребра — такая вершина не может удовлетворять условиям леммы, так как по условию ребер, инцидентных вершине, должно быть не более трех. Если есть компонента связности, представляющая из себя простую ориентированную цепь, то в начальную вершину этой цепи входит по ребру из каждого цикла, что также противоречит условиям леммы. Во втором случае, когда простые циклы не имеют общих вершин, в силу связности графа, должна существовать простая цепь из некоторой вершины одного цикла в некоторую вершину другого цикла. По доказанному второму утверждению леммы ребра этой простой цепи исходят из концевых вершин, что противоречит третьему утверждению леммы.

Докажем последнее утверждение леммы. Для подграфа рассматриваемого графа выполняется третье утверждение леммы. Рассмотрим произвольное ребро подграфа в качестве простой цепи. Будем последовательно удлинять эту простую цепь, добавляя к ней по одному ребру подграфа, которые ведут в начало цепи. Так как граф — конечный, а подграф не содержит циклов, то через конечное число шагов мы не сможем добавить такое ребро. Тогда в вершину, которая после окончания процесса добавления ребер является началом простой цепи, не может входить ни одного ребра подграфа. Покажем, что если рассмотреть эту вершину в качестве корневой, то рассматриваемый подграф является деревом, ориентированным от этого корня. Это следует из того, что подграф — связный, и любая вершина должна быть достижима из корневой вершины, а поскольку любая простая цепь, идущая из корневой вершины, — ориентированная, получаем дерево, ориентированное от корня.

Доказательство леммы 12 закончено.

Переформулируем утверждения леммы 12 в терминологии графа узора.

Лемма 13. *Для любого графика Γ любая компонента слабой связности его узора $G(\Gamma)$ может иметь вид или ориентированного от корня дерева, или содержать один ориентированный простой цикл, в который не входит ребер.*

Доказательство. Из леммы 11 и определения графа узора вытекает, что степень входа любой его вершины не более единицы, а степень исхода не более двойки. Применяя лемму 12 получаем искомое утверждение. Доказательство закончено.

Основным свойством введенной конструкции является то, что наличие ориентированного цикла в узоре эквивалентно наличию у машины Тьюринга τ_3 конечного u -инициального функционирования. Лемма 10 дает сведение в одну сторону, проведем обратное сведение.

Лемма 14. *Пусть узор $G(\Gamma)$ некоторого графика вычисления Γ содержит ориентированный цикл. Тогда множество ячеек B , образующих вершины цикла, является замкнутым локально корректным u -инициальным подграфиком.*

Доказательство. Разобьем блок B на компоненты \bowtie связности $B_1, B_2, \dots, B_p, p \in \mathbb{N}$. Покажем, что во-первых каждый из блоков B_i является прямоугольником без «пустот» внутри, во-вторых B_i является компонентой \bowtie графика Γ (то есть граничит в смысле \bowtie связности только с ячейками с пустым состоянием), в-третьих $p = 1$ — то есть, что B есть замкнутый локально корректный u -инициальный подграфик.

Рассмотрим множество $\widehat{B} = V^+(B)/B$. В случае, если это множество не содержит ячеек с непустыми значениями, к B применима лемма 6, которая дает, что компоненты B_i являются локально корректными подграфиками, затем из леммы 8 имеем, что $p = 1$, что дает утверждение леммы.

Допустим, что \widehat{B} содержит ячейки с непустыми значениями. Отметим некоторые свойства состояний ячеек β из множества \widehat{B} .

Утверждение 1. *Значение ячейки $\beta \in \widehat{B}$ не может быть равно bad.*

В противном случае граничащая с β ячейка $\alpha \in B$ не будет локально корректной.

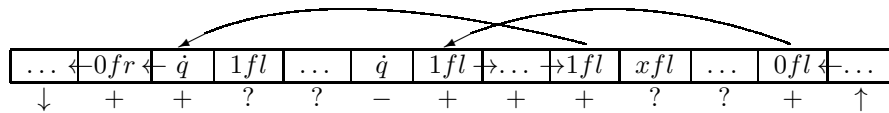
Утверждение 2. Пусть $\alpha \in B$, $\alpha \in V^+(\beta)$, $\beta \in \widehat{B}$. Тогда не может быть такого, чтобы $\alpha + \Delta(\alpha, \Gamma) = \beta$.

В противном случае имеем противоречие с тем, что множество ячеек B образует цикл в узоре $G(\Gamma)$ — так как в узоре ребро в α может идти только из β , а β не принадлежит циклу.

Утверждение 3. Пусть ячейка $\beta \notin B$, $\Gamma(\beta) = \dot{q}$. Пусть у ячейки $\alpha = \beta + v_e$ значение $\Gamma(\alpha) = 1fl$. Тогда не возможна ситуация, что $\alpha \in B$.

Доказательство от противного. В силу цикличности B в α должно входить ребро. Из того, что $\Gamma(\beta) = \dot{q}$, вытекает, что оно может идти только из вершины $\alpha + v_e^u \in B$, следовательно $\Gamma(\alpha + v_e^u) = 0fl$.

Из определения узора имеем $\alpha + v_e^u + v_e \in B$, при этом $\Gamma(\alpha + v_e^u + v_e) \in \{0fl, bl\}$. Из локальной корректности $\alpha + v_e^u$ имеем $\Gamma(\alpha + v_e^u + v_w) \in \{0fl, 1fl\}$. Далее, имеем выходящую из ячейки α направо последовательность ячеек из B со значением $1fl$. Достигнуть ячейки $\alpha + v_e^u + v_w$ она не может (иначе из ячейки $\alpha + v_e^u + v_w$ будет ребро в β), следовательно из некоторой ячейки α' между α и $\alpha + v_e^u + v_w$ будет переход по вектору v_e^u . По определению узора $\Gamma(\alpha' - v_e^u) = \dot{q}$, $\alpha' - v_e^u + v_w \in B$, $\Gamma(\alpha' - v_e^u) = 0fr$. Так как из ячеек со значением $0fr$ путь может идти только налево с заворотом вниз, а в ячейку со значением $0fl$ можно прийти только справа с предварительным поворотом снизу, имеем следующую картину.



Здесь под ячейками стоят символы $+$, $-$, $?$ означающие, что ячейка лежит в B , не лежит в B , может как лежать, так и не лежать в B соответственно.

Покажем, что возникающая конфигурация противоречит тому, что B является циклом. Действительно, переход снизу на строку возможен только по последовательности ячеек со значениями bl , следовательно правее ячейки $\alpha + v_e^u$ найдется ячейка α'' с таким значением. При этом значения всех ячеек между ними равны $0fl$. Переход вниз со строки возможен только по зарисовке F1, следовательно найдется ячейка α''' удовлетворяющая этой зарисовке.

Покажем, что все ячейки от $\alpha''' + v_s$ до $\alpha'' + v_s$ включительно принадлежат B . Действительно, если это не так, то существует поворот вниз с этой строки, значит найдется ячейка α_1 , в которой этот поворот произошел. Так как такой поворот может произойти только по зарисовке B2, значение ячейки $\alpha_1 + v_s$ равно $00l$, а значение $\alpha_1 + v_s + v_e = bl$. Заметим, что определение узора не допускает второй шаг подряд вниз, и также не допускает поворот вправо с ячейки со значением bl . При этом ячейка $\alpha_1 + v_s + v_e + v_s$ либо имеет значение bl , либо является не локально корректной — то есть в обоих случаях путь через нее проходить не может. Значит, путь должен от $\alpha_1 + v_s$ пройти налево, потом вниз на одну ячейку, потом направо до ячейки α_2 , в которой должен повернуть вниз. Заметим, что к α_2 применимо аналогичное α_1 рассуждение, и при этом α_2 не правее α_1 . Следовательно, путь не может попасть правее ячейки $\alpha_1 + v_e$, что противоречит цикличности B . Полученное противоречие влечет, что все ячейки от $\alpha''' + v_s$ до $\alpha'' + v_s$ включительно принадлежат B .

В силу локальной корректности α'' и α''' имеем $\Gamma(\alpha''' + v_s) = 01r$, $\Gamma(\alpha'' + v_s) = bl$, $\Gamma(\alpha'' + v_s + v_w) = 01l$. Рассуждение выше показывает, что поворотов вниз в ячейках от $\alpha''' + v_s + v_e$ до $\alpha'' + v_s + v_w + v_w$ включительно быть не может, следовательно они лежат на одном непрерывном отрезке пути по направлению v_e . Они могут удовлетворять исключительно зарисовкам П1-П11 (так как зарисовки F1-F8 предполагают строку над ними имеющей разметку вида $*0*$). Эта последовательность зарисовок влечет, что среди этих ячеек существует единственная ячейка со значением $q \in Q$. Однако, в силу вида зарисовок П1-П2 относительно ячеек $\beta + v_s$ и $\alpha' - v_e^u + v_s$ в их V^- окрестности должна существовать ячейка со значением головки. Относительно ячейки $\alpha' - v_e^u + v_s$ из $\alpha' - v_e^u \in B$ этой ячейкой является $\alpha' - v_e^u + v_s + v_w$. В силу того, что $\alpha' - v_e^u$ находится правее β , ячейка $\alpha' - v_e^u + v_s + v_w \notin V^-(\beta + v_s)$. Имеем на строке две различные ячейки со значениями из Q , противоречие.

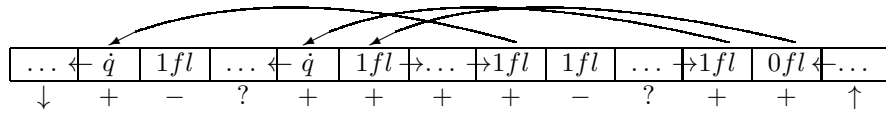
Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Пусть ячейка $\beta \notin B$, $\Gamma(\beta) = 1fl$. Пусть у ячейки $\alpha = \beta + v_w$ значение $\Gamma(\alpha) = 1fl$. Тогда не возможна ситуация, что $\alpha \in B$.

Доказательство от противного. В цикле из α идет ребро, из определения ориентации оно может идти только в ячейку $\alpha - v_e^u$. Из опре-

деления узора имеем $\Gamma(\alpha - v_e^u) = \dot{q}$, а также $\Gamma(\alpha - v_e^u + v_e) = 1fl$. При этом ячейка $\alpha - v_e^u + v_e$ не является локально S-и корректной, так как $\Gamma(\alpha + v_e) = 1fl$. Далее в ячейку α должны входить ребра вершин цикла, следовательно имеем от α налево последовательность ячеек цикла со значениями $1fl$. Эта последовательность не может продолжаться до ячейки $\alpha - v_e^u + v_e$, следовательно имеем ячейку α' , находящуюся между ячейками $\alpha - v_e^u + v_e$ и α , для которой $\Gamma(\alpha') = 1fl$, $\Gamma(\alpha' + v_w) = \dot{q}$. В ячейку α' должно входить ребро из ячейки $\alpha' + v_e^u \in B$, при этом $\Gamma(\alpha' + v_e^u) = 0fl$. Если $\alpha' + v_w \notin B$, попадаем в условия утверждения 3, то есть $\alpha' + v_w \in B$.

Имеем следующую картину.



Далее доказательство аналогично доказательству утверждения 3. С одной стороны, для получения цикла, вся вторая строка должна быть корректной, с другой стороны из локальной корректности имеем на ней две ячейки с головками. Получаем противоречие. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. Пусть ячейка $\beta \notin B$, $\Gamma(\beta) = 0fl$. Пусть у ячейки $\alpha = \beta + v_e$ значение $\Gamma(\alpha) = 0fl$. Тогда не возможна ситуация, что $\alpha \in B$.

Доказательство от противного. В цикле из α идет ребро, из определения ориентации оно может идти только в ячейку $\alpha - v_e^u$. При этом имеем $\Gamma(\alpha - v_e^u) = 1fl$, $\Gamma(\alpha - v_e^u + v_w) = \dot{q}$. Заметим, что из $\Gamma(\alpha + v_w) = 0fl$ вытекает, что ячейка $\alpha - v_e^u + v_w$ не является локально S-и корректной, то есть $\alpha - v_e^u + v_w \notin B$. Данный случай попадает под посылку утверждения 3, то есть не возможен. Доказательство закончено.

Утверждение 6. Допустим, что ячейка $\beta \in \widehat{B}$ является локально S-и корректной. Тогда не может быть такого, чтобы для некоторой ячейки $\alpha \in B$, существовал вектор $v \in \{v_e, v_s, v_w, v_n\}$, что $\Delta(\beta, \Gamma) = v$ и $\beta + \Delta(\beta, \Gamma) = \alpha$.

Действительно, если исходящее из α ребро в цикле не соответствует переходу по вектору v_e^u , то это вытекает из леммы 11. В противном случае значение ячейки α равно либо $1fl$, либо $0fl$.

Заметим, что β не может равняться $\alpha + v_n$ (противоречие с ненулевым значением β либо локальной корректностью α), а также $\alpha + v_s$ (из ячейки со значением xfl стрелок вниз входить не может по определению ориентации). Следовательно, β может быть либо слева, либо справа α .

Имеем четыре варианта.

- 1) Случай $\Gamma(\alpha) = 0fl$, $\beta = \alpha + v_e$. Из определения ориентации он не возможен.
- 2) Случай $\Gamma(\alpha) = 1fl$, $\beta = \alpha + v_w$. Из определения ориентации он не возможен.
- 3) Случай $\Gamma(\alpha) = 0fl$, $\beta = \alpha + v_w$. От противного — пусть в β идет ребро, тогда $\Gamma(\beta) = 0fl$. Данный случай попадает под посылку утверждения 5, то есть он не возможен.
- 4) Случай $\Gamma(\alpha) = 1fl$, $\beta = \alpha + v_e$. От противного — пусть в β идет ребро, тогда $\Gamma(\beta) = 1fl$. Данный случай попадает под посылку утверждения 4, то есть он не возможен.

Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. Пусть ячейка $\beta \in \widehat{B}$. Тогда не возможен случай, что $\beta + v_n \in B$ и $\beta + v_w \in B$.

Доказательство от противного — допустим, это не так. Из того, что ячейки из B не могут иметь значение nul и локальной корректности $\beta + v_n$ следует, что $\Gamma(\beta) \neq nul$. Заметим, что окрестность $\beta + v_w$ не может удовлетворять зарисовкам F1-F11. Далее, из утверждений 2 и 6 вытекает, что в β не могут идти ребра из $\beta + v_n$ и $\beta + v_w$, и из нее также не может идти ребер в эти ячейки. Следовательно, окрестность $\beta + v_w$ не может удовлетворять зарисовкам I1-I11, L1-L8, B1, B3. Остается единственный случай B2, из которого вытекает $\Gamma(\beta) = bl$ и который тоже не возможен. Доказательство утверждения закончено.

Утверждение 8. Пусть B' — компонента \bowtie связности блока B . Тогда не существует конечного множества ячеек B'' , являющегося \bowtie связным, что $V^+(B'') \setminus B'' \subset B'$.

Содержательно это утверждение означает, что не может быть «пустот» внутри компоненты \bowtie связности $B' \subset B$. Действительно, пусть такая пустота есть. Тогда обходя границу B'' по часовой стрелке, убеждаемся, что существует ячейка $\beta \in B''$, такая что $\beta + v_n \in B$ и $\beta + v_w \in B$. Имеем противоречие с утверждением 7. Доказательство утверждения закончено.

Утверждение 9. Пусть ячейка $\beta \in \widehat{B}$. Тогда не возможен случай, что $\beta + v_e \in B$ и $\beta + v_s \in B$.

Доказательство от противного — допустим, это не так. Из того, что ячейки из B не могут иметь значение nul и локальной корректности $\beta + v_e$ следует, что $\Gamma(\beta) \neq nul$, $\Gamma(\beta + v_e + v_s) \neq nul$. Отметим, что в соответствии с утверждением 7 ячейка $\beta + v_s + v_e \in B$. Следовательно, окрестность ячейки $\beta + v_s$ не может удовлетворять зарисовкам F1-F11. Далее, из утверждений 6 и 2 вытекает, что в β не могут идти ребра из $\beta + v_e$ и $\beta + v_s$, и из нее также не может идти ребер в эти ячейки. Следовательно, окрестность $\beta + v_e$ не может удовлетворять зарисовкам П1-П11, L1-L8. Случаи, в которых окрестность ячейки $\beta + v_e$ удовлетворяют зарисовкам В1-В3, также противоречивы. Доказательство утверждения закончено.

Утверждение 10. Пусть B' — компонента \bowtie связности блока B . Тогда не существует ячейки $\beta \in \widehat{B}$, что $\beta + v_{sw} \notin B$, $\beta + v_w \in B'$, $\beta + v_s \in B'$.

Доказательство от противного. Так как $\beta + v_s$ и $\beta + v_w$ принадлежат одной компоненте связности, должен существовать \bowtie путь их соединяющий. Этот путь может либо обходить β против часовой стрелки, либо $\beta + v_{sw}$ по часовой стрелке. Оба случая противоречат утверждению 8 — так как либо β , либо $\beta + v_{sw}$ оказываются внутри «пустоты» в B' . Доказательство утверждения закончено.

Утверждение 11. Пусть ячейка $\beta \in \widehat{B}$. Тогда не возможен случай, что $\beta + v_e \in B$, $\beta + v_n \in B$, $\beta + v_e + v_n \in B$.

Доказательство от противного. Из того, что в B не входят ячейки с нулевыми значениями, имеем, что окрестность ячейки $\beta + v_e$ не может удовлетворять зарисовкам F1-F11, а также L1. Применяя утверждения 6 и 2 к ячейке $\beta + v_e$ имеем, что она не может удовлетворять

зарисовкам П1-П11, L2-L8, В2. Остается случай, когда ячейка $\beta + v_e$ удовлетворяет В3. Заметим, что если $\Gamma(\beta) = 00l$, то $\Gamma(\beta + v_n) = 01l$ и в β идет ребро.

Следовательно, остается единственный случай $\Gamma(\beta) = 01l$, $\Gamma(\beta + v_n) = 00l$, $\Gamma(\beta + v_e) = bl$, $\Gamma(\beta + v_e + v_n) = bl$. Продолжим путь от ячейки $\beta + v_n$ налево. Заметим, что свернуть вверх со строки нельзя, а при повороте вниз путь тут же повернет направо. Если он дойдет до ячейки β , имеем противоречие с $\beta \notin B$, если повернет раньше в некоторой клетке β' — то $\Gamma(\beta' + v_e) = bl$, и ячейка $\beta' + v_e + v_n$ не локально корректная, что противоречиво.

Доказательство утверждения 11 закончено.

Утверждение 12. Пусть ячейка $\beta \in \widehat{B}$, $\Gamma(\beta) \notin \{0fl, 1fl\}$. Тогда не возможен случай, что $\beta + v_w \in B$, $\beta + v_s \in B$, $\beta + v_{sw} \in B$.

Доказательство от противного. Из того, что в B не входят ячейки с нулевыми значениями, имеем, что окрестности ячеек $\beta + v_s$ и $\beta + v_{sw}$ не могут удовлетворять зарисовкам F1-F11, и окрестность ячейки $\beta + v_w$ не может удовлетворять L1-L8. Применяя утверждения 6 и 2 к ячейке $\beta + v_w$ имеем, что она не может удовлетворять зарисовкам П1-П11, В1, В3, F1-F3, F5-F6, F8-F10. Значению F11 $\beta + v_w$ не может удовлетворять в силу $\Gamma(\beta + v_s) \neq nul$. Остается два варианта — F4 и F7.

Рассмотрим вариант, когда $\beta + v_w$ удовлетворяет F4. В силу локальной корректности $\beta + v_w$ $\Gamma(\beta) = 1fl$, что противоречит условию утверждения.

Рассмотрим вариант, когда $\beta + v_w$ удовлетворяет F7. В силу локальной корректности $\beta + v_w$ $\Gamma(\beta) = 0fl$, что противоречит условию утверждения.

Доказательство утверждения 12 закончено.

Утверждение 13. Пусть B' — компонента \bowtie связности множества B . Тогда существуют $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, такие что $B' = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$.

Из утверждения 8 следует, что внутри B' не может быть пустот. Будем обходить границу B' по часовой стрелке. В случае, если B' отличается от прямоугольника, мы встретимся с как минимум одной из четырех ситуаций не выпуклости, перечисленных ниже

- 1) $\beta \notin B, \beta + v_n \in B', \beta + v_w \in B'$.
- 2) $\beta \notin B, \beta + v_s \in B', \beta + v_e \in B'$.
- 3) $\beta \notin B, \beta + v_n \in B', \beta + v_e \in B'$.
- 4) $\beta \notin B, \beta + v_s \in B', \beta + v_w \in B'$.

Первые два случая не возможны по утверждениям 7 и 9. Третий случай не возможен по совокупности утверждений 10 и 11. Четвертый случай не возможен по утверждениям 10 и 12, за исключением ситуации $\Gamma(\beta) \in \{0fl, 1fl\}$.

Из доказанных утверждений следует, что B' имеет вид прямоугольника, с возможно «вырезанным» без возникновения ситуаций 1-3 правым верхним углом. Покажем от противного, что «выреза» быть не может.

Обозначим через $\beta_u = (x_u, y_u)$ ячейку из множества B' , имеющую максимальную первую координату из всех ячеек с максимальной второй координатой. Обозначим через $\beta_r = (x_r, y_r)$ ячейку из множества B' , имеющую максимальную вторую координату из всех ячеек с максимальной первой координатой. Заметим, что «вырез» у B' отсутствует тогда и только тогда, когда $\beta_u = \beta_r$. В силу запрета ситуаций 1-3 все ячейки «выреза» находятся в прямоугольнике $B'_\perp = \{(x, y) \mid x_u + 1 \leq x \leq x_r, y_r + 1 \leq y \leq y_u\}$.

Рассмотрим множество $\hat{B}'_\perp = (V^+(B) \setminus B) \cap B'_\perp$. В силу имеющихся ограничений на реализацию ситуации 4 для любой ячейки β' из \hat{B}'_\perp имеем либо $\Gamma(\beta') \in \{0fl, 1fl\}$, либо $\beta' + v_s \in \hat{B}'_\perp$, либо $\beta' + v_w \in \hat{B}'_\perp$.

Возьмем ячейку $\beta'' \in \hat{B}'_\perp$, такую что $\Gamma(\beta'') \in \{0fl, 1fl\}$, $\beta'' + v_s \in B'$, $\beta'' + v_w \in B'$. В силу локальной корректности $\beta'' + v_w$, имеем $\Gamma(\beta'' + v_w + v_n) = nul$.

Следовательно, либо $\beta'' = (x_u + 1, y_u)$, либо $\beta'' + v_w + v_n \notin B$. Пусть $\beta'' + v_w + v_n \notin B$, тогда найдется ячейка β''' левее ее такая, что $\beta''' + v_w \in B'$. В силу невозможности ситуации 2 все ячейки от $\beta''' + v_s$ до $\beta'' + v_w$ включительно лежат в B , в силу $\Gamma(\beta'') \in \{0fl, 1fl\}$ их окрестности удовлетворяют зарисовкам F1-F9, следовательно значение ячеек от β''' до $\beta'' + v_w + v_n$ равно nul . Далее, в силу локальной корректности ячейки $\beta''' + v_s + v_w$ имеем $\Gamma(\beta''' + v_w) = nul$, противоречие с $\beta''' + v_w \in B'$. То есть имеем единственный случай $\beta'' = (x_u + 1, y_u)$.

Из того, что $\beta'' = (x_u + 1, y_u)$, имеем $y_r = y_u - 1$ (в противном случае строится ячейка вида β'' с координатой $y < y_u$).

Далее, имеем два случая значения ячейки β'' . Случай $\Gamma(\beta'') = 1fl$ влечет $\Gamma(\beta'' + v_w) = \dot{q}$. Случай $\Gamma(\beta'') = 0fl$ влечет $\Gamma(\beta'' + v_w) = 1fl$. Далее, в обоих случаях $\Gamma(\beta'' + v_w + v_s) \in \{01l, 11l\}$. Следовательно все ячейки от $\beta'' + v_w + v_s$ до $\beta_r + v_w$ включительно имеют значения из множества $\{01l, 11l, 21l\}$. Далее, из цикличности B имеем $\Gamma(\beta_r) = bl$. В силу $\beta_r \in B$ имеем противоречие с утверждением 6.

Следовательно, «выреза» быть не может и утверждение 13 доказано.

Утверждение 14. Пусть ячейки $\alpha, \alpha + v_n$ принадлежат B , ячейки $\alpha + v_e, \alpha + v_n + v_e$ не принадлежат B . Тогда значения ячеек $\alpha + v_e$ и $\alpha + v_n + v_e$ равны nil .

В силу локальной корректности ячейки α и утверждения 2 имеем, что окрестность ячейки α удовлетворяет либо зарисовке В2, либо В3. Случай В3 соответствует доказываемому утверждению. Покажем, что случай зарисовки В2 не возможен.

Если окрестность α удовлетворяет В2, то окрестность $\alpha + v_n$ удовлетворяет либо В2, либо F10. В случае F10 единственной ячейкой, из которой может идти вектор в $\alpha + v_n$, является $\alpha + v_n + v_e \notin B$, что противоречит $\alpha + v_n \in B$. Остается случай, когда окрестность $\alpha + v_n$ удовлетворяет В2.

Ячейки $\alpha, \alpha + v_n$ принадлежат одной компоненте связности B' множества B , которая в силу утверждения 13 является прямоугольником без пустот внутри. Из посылки утверждения вытекает, что они лежат на правом ребре этого прямоугольника. Рассмотрим верхнюю правую ячейку α' прямоугольника B' . В силу локальной корректности B' и того факта, что $\alpha + v_n$ находится под ней и удовлетворяет В2, значение α' удовлетворяет либо В2, либо F10. В случае F10 в ячейку α' идет вектор из ячейки $\alpha' + v_e \notin B$, то есть этот случай невозможен. В случае В2 значение ячейки α' принадлежит множеству $\{01l, 00l\}$. Случай $\Gamma(\alpha') = 00l$ влечет входящее ребро из ячейки $\alpha' + v_n \notin B$, что противоречит утверждению 2.

В случае $\Gamma(\alpha') = 01l$ рассмотрим левую верхнюю ячейку α'' прямоугольника B' . В силу локальной корректности значение ее окрестности удовлетворяет либо В1, либо II-II1. В случае В1 в нее идет ребро сверху, в случае II-II1 — слева, то есть имеем противоречие с утверждением 2.

Утверждение 14 доказано.

Утверждение 15. Пусть ячейки α , $\alpha + v_n$ принадлежат B , ячейки $\alpha + v_w$, $\alpha + v_n + v_w$ не принадлежат B . Тогда значения ячеек $\alpha + v_w$ и $\alpha + v_n + v_w$ равны nul .

В силу локальной корректности ячейки α и утверждения 2 имеем, что окрестность ячейки α удовлетворяет либо зарисовке В1, либо В3, либо L1. Случаи L1 и В1 соответствует доказываемому утверждению. Покажем, что случай зарисовки В3 не возможен.

Если окрестность α удовлетворяет В3, то окрестность $\alpha + v_n$ удовлетворяет либо В3, либо F11. В случае F11 имеем противоречие с утверждением 2, остается случай В3.

Рассмотрим компоненту связности B' блока B , которая содержит ячейки α , $\alpha + v_n$. Согласно утверждению 13 B' представляет из себя прямоугольник ширины не менее 2, однако в предположении, что $\alpha + v_n$ удовлетворяет В3, имеем, что $\Gamma(\alpha + v_n + v_e) = nul$, и ячейка $\alpha + v_n + v_w$ не принадлежат B посылке доказываемого утверждения. Пришли к противоречию.

Утверждение 15 доказано.

Утверждение 16. Пусть ячейки α , $\alpha + v_e$ принадлежат B , ячейки $\alpha + v_n$, $\alpha + v_n + v_e$ не принадлежат B . Тогда значения ячеек $\alpha + v_n$ и $\alpha + v_n + v_e$ равны nul .

Рассмотрим множество ячеек $B^\top = \{\beta \in \hat{B} \mid \beta + v_s \in B\}$. Допустим, что в B^\top есть ячейка с ненулевым значением β' . В силу утверждений 13, 10, 7, 9 имеем, что ячейки $\beta' + v_w$ и $\beta' + v_e$ не принадлежат B , а также как минимум одна из ячеек $\beta' + v_w + v_s$ и $\beta' + v_e + v_s$ принадлежит B .

Пусть $\beta' + v_e + v_s \in B$. Выберем из множества ячеек B^\top с ненулевыми значениями такую, что ее первая координата максимальна, и что ее сосед по направлению $v_e + v_s$ лежит в B , обозначим ее через β'' . В силу выбора β'' имеем $\Gamma(\beta'' + v_e) = nul$. Следовательно окрестность ячейки $\beta'' + v_e + v_s$ удовлетворяет одной из зарисовок F1-F11. Из локальной корректности $\beta'' + v_s$ ее окрестность должна удовлетворять зарисовкам F1-F10, откуда $\Gamma(\beta'') = nul$, противоречие.

Следовательно, для любой ячейки $\beta' \in B^\top$, либо $\Gamma(\beta') = nul$, либо $\Gamma(\beta' + v_e) \neq nul$, либо $\beta' + v_e + v_s \notin B$. То есть из допущения, что в B^\top найдется ненулевая ячейка, имеем, что для некоторой прямоугольной компоненты связности B' блока B все граничащие с

ней сверху ячейки имеют ненулевые значения. Покажем, что это не возможно.

Рассмотрим самую верхнюю левую ячейку α' из B' . Разберем возможные случаи ее окрестности. Ее окрестность не может удовлетворять зарисовкам F1-F11 — так как над ней не нулевая ячейка. Она не может удовлетворять зарисовкам L1-L8, так как B' имеет высоту как минимум 2, и под ней находится ненулевая ячейка. Она не может удовлетворять зарисовке B1 — так как слева от нее не нулевая ячейка. Она не может удовлетворять зарисовке B3 — так как тогда из нее ведет вектор в $\alpha' + v_n \notin B$. Она не может удовлетворять зарисовкам П1-П11 — так как тогда либо из нее, либо в нее из ячейки $\alpha' + v_e \notin B$ идет ребро, что противоречит цикличности B . Остается случай B2, который влечет $\Gamma(\alpha') \in \{00l, 01l\}$. Случай $\Gamma(\alpha') = 00l$ влечет, что из $\alpha' + v_n \notin B$ в α' ведет вектор, то есть он не возможен.

Остался единственный случай $\Gamma(\alpha') = 01l$. Рассмотрим правую верхнюю ячейку α'' блока B' . В силу локальной корректности B' имеем, что значение окрестности α'' удовлетворяет либо ограничению B1, либо П1-П11 для нечетного значения разметки строки. В случае B1 в ячейку α'' идет вектор из ячейки $\alpha'' + v_n \notin B$, в случае П1-П11 в ячейку α'' идет вектор из ячейки $\alpha'' + v_w \notin B$.

Доказательство утверждения 16 закончено.

Утверждение 17. Пусть ячейки α , $\alpha + v_e$ принадлежат B , ячейки $\alpha + v_s$, $\alpha + v_s + v_e$ не принадлежат B . Тогда значения ячеек $\alpha + v_s$ и $\alpha + v_s + v_e$ равны nul .

Рассмотрим множество ячеек $B^\perp = \{\beta \in \widehat{B} \mid \beta + v_n \in B\}$. Допустим, что в B^\perp есть ячейка с ненулевым значением β' . В силу утверждений 13, 10, 7, 9 имеем, что ячейки $\beta' + v_w$ и $\beta' + v_e$ не принадлежат B , а также как минимум одна из ячеек $\beta' + v_w + v_n$ и $\beta' + v_e + v_n$ принадлежит B .

Пусть $\Gamma(\beta' + v_w) = nul$. Тогда в силу локальной корректности ячейки $\beta' + v_w$ имеем $\Gamma(\beta') = nul$, что противоречиво.

Пусть $\beta' + v_e + v_n \in B$. Выберем из множества ячеек B^\perp с ненулевыми значениями такую, что ее первая координата максимальна, и что ее сосед по направлению $v_e + v_n$ лежит в B , обозначим ее через β'' . В силу выбора β'' имеем $\Gamma(\beta'' + v_e) = nul$. Следовательно окрестность ячейки $\beta'' + v_e + v_n$ удовлетворяет одной из зарисовок L1-L8, откуда $\Gamma(\beta'') = nul$, противоречие.

Следовательно, для любой ячейки $\beta' \in B^\perp$, либо $\Gamma(\beta') = nul$, либо $\Gamma(\beta' + v_e) \neq nul$, либо $\beta' + v_e + v_n \notin B$. То есть из допущения, что в B^\perp найдется ненулевая ячейка, имеем, что для некоторой прямоугольной компоненты связности B' блока B все граничащие с ней снизу ячейки имеют ненулевые значения. Покажем, что это не возможно.

Рассмотрим правую нижнюю ячейку α' блока B' . Ее окрестность не может удовлетворять зарисовкам F1-F11 (сверху ненулевое значение), L1-L8 (снизу ненулевое значение), B1 (слева ненулевое значение), B3 (ребро из ячейки $\alpha' + v_s \notin B$). П1-П11 (ребро с ячейкой $\alpha' + v_e \notin B$). В случае B2 имеем $\Gamma(\alpha') \in \{00l, 01l\}$. Случай $\Gamma(\alpha') = 01l$ влечет, что из α' в $\alpha' + v_s \notin B$ ведет ребро, то есть он не возможен.

Остается случай $\Gamma(\alpha') = 00l$. Рассмотрим левую нижнюю ячейку α'' блока B' . Из локальной корректности B' окрестность α'' удовлетворяет либо ограничениям П1-П11, либо B1. В случае B1 из α'' идет ребро в $\alpha'' + v_s \notin B$, в случае П1-П11 имеем $\alpha'' + v_w \notin B$.

Доказательство утверждения 17 закончено.

Утверждение 18. Пусть B' — компонента \bowtie связности множества B . Тогда для всех $\beta \in V^\star(B') \setminus B'$ имеем $\Gamma(\beta) = nul$.

Из утверждения 13 следует, что B' имеет вид прямоугольника без пустот внутри. Из утверждений 14, 15, 16, 17 имеем, что значения всех граничных с B' относительно шаблона соседства V^+ ячеек равно нулю.

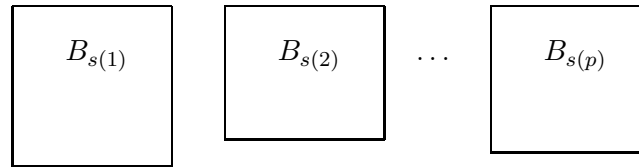
Остается случай ячейки β , граничной с левой нижней ячейкой $\alpha \in B'$ по вектору v_{sw} . В силу того, что $\Gamma(\beta + v_n) = nul$, $\Gamma(\beta + v_e) = nul$, окрестность ячейки α удовлетворяет зарисовке L1. Следовательно, $\Gamma(\beta) = nul$.

Доказательство утверждения 18 закончено.

Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Из утверждений 13 и 18 имеем, что компоненты \bowtie связности множества B являются локально корректными подграфами графика вычисления. По утверждению 2 леммы 6 они представляют из себя таблицы некоторого конечного функционирования C МТ τ_3 , причем начальная конфигурация представляет из себя унитарное слово с расположением головки над первой единицей.

Разобьем множество B на компоненты \bowtie связности B_1, B_2, \dots, B_p , $p \in \mathbb{N}$. Покажем, что $p = 1$.

Допустим, что это не так и $p > 1$. В силу того, что отдельные компоненты связности могут быть соединены друг с другом только с помощью вектора v_e^u по зарисовкам S1-S2, имеем, что если компонента B_i связана с компонентой B_j , $1 \leq i < j \leq p$, то их верхние строки имеют одинаковую вторую координату. В силу того, что все компоненты B_1, B_2, \dots, B_p лежат на одном цикле, должна существовать последовательность попарных связей между ними, то есть у них всех верхние строки имеют одинаковую вторую координату. Следовательно, существует перестановка s из p элементов, что блоки $B_{s(1)}, B_{s(2)}, \dots, B_{s(p)}$ расположены следующим образом.



Заметим, что из ячеек блока $B_{s(1)}$ не могут выходить ребра ни в один из блоков $B_{s(2)}, B_{s(3)}, \dots, B_{s(p)}$. Следовательно, ячейки блока $B_{s(1)}$ не могут быть частью цикла, пришли к противоречию.

Покажем, что B является замкнутым локально корректным u -инициальным подграфиком. Для этого достаточно установить, что в B не входит ребер узора по векторам v_e^u . Действительно, такие ребра возможны только для двух ячеек α и $\alpha + v_e$ первой строки B , для которых $\Gamma(\alpha) = \dot{q}$, $\Gamma(\alpha + v_e) = 1fl$. Но по определению узора в них могут входить ребра только из ячеек $\alpha + v_e^u$ и $\alpha + v_e + v_e^u$, которые обязаны принадлежать B в силу цикличности.

Доказательство леммы 14 закончено.

Резюмируем полученные результаты о связи структуры узора и свойствах графика вычисления в следующей лемме.

Лемма 15. *МТ τ_3 имеет конечное u -инициальное функционирование тогда и только тогда, когда найдется график вычисления Γ , узор $G(\Gamma)$ которого содержит ориентированный цикл.*

Доказательство. Необходимость является прямым следствием леммы 9.

Покажем достаточность. По лемме 14 имеем, что наличие цикла в узоре $G(\Gamma)$ графика вычисления Γ влечет существование замкнутого локально корректного u -инициального подграфика B . По лемме 9 наличие замкнутого локально корректного u -инициального подграфика влечет существование конечного u -инициального функционирования МТ τ_3 .

Доказательство леммы 15 закончено.

Полученные результаты позволяют сводить проблему остановки МТ τ_3 в формулировке теоремы 2 к проблеме разрешимости свойства обратимости в семействе КА с фиксированной локальной функцией переходов. Проведем это сведение.

Для формулировки дальнейших результатов нам понадобится определение клеточного автомата с переменной структурой (КАПС). Пусть состояния клеточного автомата μ представляют из себя пары вида (x, y) $x \in E_{n_1}$, $y \in E_{n_2}$. Тогда локальную функцию переходов φ можно рассматривать как вектор функцию (ψ, ϕ) . Будем называть КА μ клеточным автоматом с переменной структурой, если вторая компонента состояния ячейки не меняется в процессе функционирования μ , то есть $\phi((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)) = y_0$. Для удобства, значение второй компоненты состояния ячейки будем называть основанием, а первой — активным состоянием. Записывать КАПС μ будем в виде пятерки $(\mathbb{Z}^k, E_{n_1}, E_{n_2}, V, \psi)$. В случае, если $n_1 = 2$, будем называть КАПС бинарным. Будем называть бинарный клеточный автомат с переменной структурой линейным, если для любого фиксированного значения переменных основания его локальная функция переходов является линейной функцией. В предположении, что состояние покоя кодируется парой $(0, 0)$, КАПС является частным случаем КА, и на него распространяется определение обратимости для КА.

Пусть задано натуральное число $u > 1$. Построим бинарный линейный КАПС μ_u , такой, что он будет не обратим тогда и только тогда, когда МТ τ_3 имеет конечное u -инициальное функционирование. Шаблоном соседства μ_u будет набор $V^{\star-u} = (v_e, v_s, v_{sw}, v_w, v_n, v_e^u)$. Локальную функцию переходов ψ будем полагать зависящей от переменных

$$\psi = \psi(x_0, x_e, x_s, x_w, x_n, x_{ee}, y_0, y_e, y_s, y_{sw}, y_w, y_n, y_{ee}).$$

Здесь (x_0, y_0) соответствует состоянию ячейки α , (x_d, y_d) — состоянию ячейки $\alpha + v_d$, $d \in \{e, s, w, sw, n\}$, (x_{ee}, y_{ee}) — состоянию ячейки

$\alpha + v_e^u$. От переменной x_{sw} ψ существенно зависеть не будет. Значением основания будем полагать множество значений ячеек графика вычисления $M \cup Q \cup \{nul, bad, bl\}$, при этом $n_2 = 3 + 4 \cdot 3 + 61 + 3 = 79$.

Будем рассматривать конфигурации основания КАПС μ_u как графики вычисления Γ . Локальное функционирование в ячейке α относительно состояния основания Γ будет устроено следующим образом — активное состояние не меняется, если $\Delta(\alpha, \Gamma) = 0$, или представляет из себя сумму по модулю 2 значений активного состояния ячеек α и $\alpha + v$, где $v = \Delta(\alpha, \Gamma)$. Заметим, что для задания ориентации $\Delta(\alpha, \Gamma)$ ячейки α графика вычисления Γ достаточно знать набор значений состояний основания окрестности α вида $(y_0, y_e, y_s, y_{sw}, y_w, y_n, y_{ee})$, то есть $\Delta(\alpha, \Gamma)$ может быть представлена через некоторую функцию $\delta(y_0, y_e, y_s, y_{sw}, y_w, y_n, y_{ee})$, $\delta : E_{n_2}^7 \mapsto V^{\star-u}(0)$ следующим образом

$$\Delta(\alpha, \Gamma) = \delta(\Gamma(\alpha), \Gamma(\alpha + v_e), \Gamma(\alpha + v_s), \dots, \Gamma(\alpha + v_{ee})).$$

С применением δ можно задать ψ следующей формулой

$$\psi = \begin{cases} x_0 \oplus x_d, & \delta(y_0, y_e, y_s, y_{sw}, y_w, y_n, y_{ee}) = v_d, \quad d \in \{e, s, w, sw, n\} \\ x_0 \oplus x_{ee}, & \delta(y_0, y_e, y_s, y_{sw}, y_w, y_n, y_{ee}) = v_e^u, \\ x_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь \oplus обозначает сумму по модулю 2.

Лемма 16. *КАПС μ_u не обратим тогда и только тогда, когда машина Тьюринга τ_3 имеет конечное u -инициальное функционирование.*

Доказательство. Заметим, что задачей поиска прообраза конфигурации μ_u является задача решения системы линейных уравнений над полем \mathbb{Z}_2 . Так как состояния ячеек активного состояния, окрестность которых находится в состоянии покоя, не меняется в процессе функционирования μ_u , можно выписать конечную систему линейных уравнений для определения прообраза. При этом необратимость μ_u эквивалентна существованию конфигурации, для которой эта система линейных уравнений будет вырождена.

Заметим, что нам достаточно системы, содержащей «зависимые» множества уравнений (то есть матрица которой не имеет вид блочно диагональной). Такие системы уравнений будут соответствовать

отдельным компонентам слабой связности узора основания. По лемме 13 эти компоненты связности имеют вид либо ориентированного от корня дерева, либо цикла с отходящими от него древовидными компонентами.

Исследуем эти два случая отдельно. В случае древовидной компоненты связности можно пронумеровать вершины дерева так, что из того, что вершина v_2 достижима ориентированным путем из v_1 , следует, что номер v_2 больше номера v_1 . Перенумеруем переменные системы в соответствии с номерами вершин. Заметим, что матрица системы уравнений после такой перенумерации станет верхнетреугольной, то есть не вырожденной.

В случае цикла с древовидными «отростками» пронумеруем вершины цикла числами $1, 2, \dots, e_1$, первую древовидную компоненту — числами $e_1 + 1, e_1 + 2, \dots, e_2$ с сохранением достижимости, последующие древовидные компоненты — числами $e_i + 1, e_i + 2, \dots, e_{i+1}$ с сохранением достижимости. После такой перенумерации матрица системы будет иметь блочно нижнетреугольный вид, причем уравнения с 1 по e_1 (соответствующие левому верхнему диагональному блоку) будут вида

$$\begin{cases} x_{e_1} \oplus x_1 = a_1, \\ x_1 \oplus x_2 = a_2, \\ x_2 \oplus x_3 = a_3, \\ \dots \\ x_{e_1-1} \oplus x_{e_1} = a_{e_1} \end{cases}$$

Матрица выписанной подсистемы является вырожденной, следовательно и вся система линейных уравнений вырождена.

Следовательно, необратимость КАПС μ_u эквивалентна наличию цикла в узоре основания. По лемме 15 существование графика вычисления Γ , узор $G(\Gamma)$ которого содержит ориентированный цикл, эквивалентно наличию у МТ τ_3 конечного u -инициального функционирования. Доказательство леммы закончено.

Далее нам понадобится двоичный код, который позволяет кодировать множество значений ячеек графиков $M \cup Q \cup \{nul, bad, bl\}$ и один бит, отражающий распространение информации по узору. Будут использоваться коды фиксированной длины w , при этом под двоичным кодом будем подразумевать непустое подмножество W множества E_2^w . Объемом кода $|W|$ будем называть число элементов во мно-

жестве W . Через 0^w будем обозначать слово из w нулей. От кода W будет требоваться следующие свойства:

Свойство строгой антицикличности. Для любых слов

$$a_1 a_2 \dots a_w \in W \cup \{0^w\}, \quad b_1 b_2 \dots b_w \in W \cup \{0^w\}$$

для любого $s \in \mathbb{N}$, $1 < s \leq w$, слово

$$a_s a_{s+1} \dots a_w b_1 b_2 \dots b_{s-1}$$

не принадлежит коду W .

Свойство цилиндричности. Существует такая позиция $1 \leq s \leq w$, что для любого слова

$$b_1 b_2 \dots b_{s-1} b_s b_{s+1} \dots b_w \in W$$

слово

$$b_1 b_2 \dots b_{s-1} \bar{b}_s b_{s+1} \dots b_w \in W,$$

где \bar{b}_s — инверсия значения b_s .

Код, удовлетворяющий свойству строгой антицикличности и цилиндричности, будем называть антициклическим цилиндрическим кодом.

Лемма 17. Пусть W_L^Z — двоичный код длины $L \in \mathbb{N}$, кодовые слова которого не содержат последовательностей из более чем $Z \in \mathbb{N}$ подряд идущих нулей. Пусть задан код \widetilde{W}_L^Z длины $w = L + Z + 4$, содержащий все слова вида

$$\underbrace{00 \dots 0}_{Z+2} 1 b_0 b_1 b_2 \dots b_L,$$

где $b_0 \in E_2$, $b_1 b_2 \dots b_L \in W_L^Z$. Тогда код \widetilde{W}_L^Z будет антициклическим цилиндрическим кодом.

Доказательство. Свойство цилиндричности кода \widetilde{W}_L^Z по битовому номеру $Z + 4$ очевидно. Покажем выполнение свойства строгой антицикличности.

Заметим, что в любом слове кода \widetilde{W}_L^Z слово из $Z + 2$ нулей встречается ровно один раз (оно находится в префиксе). Действительно,

слово $b_1b_2 \dots b_L$ содержит последовательности из максимум Z нулей, при условии что эта последовательность идет в начале слова и $b_0 = 0$ имеем последовательность из $Z + 1$ нулей.

Далее проведем доказательство от противного. Допустим, что найден сдвиг $1 < s \leq w$, что для некоторого кодовых слов $a_1a_2 \dots a_w$, $b_1b_2 \dots b_w \in \widetilde{W}_L^Z$ имеем

$$a_s a_{s+1} \dots a_w b_1 b_2 \dots b_{s-1} \in \widetilde{W}_L^Z.$$

В силу конструкции префикса слова случаи $1 < s \leq Z + 3$ не возможны (единица оказывается слишком близко к началу). В силу сделанного замечания о числе нулей невозможны случаи $Z + 4 \leq s \leq w - Z - 2$ — так как в этом случае началом длины $Z + 2$ сдвинутого слова оказывается некоторое внутреннее подслово слова из \widetilde{W}_L^Z , а в нем не может быть $Z + 2$ нулей. В случае $w - Z - 1 \leq s \leq w$ на позиции $Z + 3$ сдвинутого слова оказывается 0. Все случаи, когда слова $a_1a_2 \dots a_w$ и $b_1b_2 \dots b_w$ — кодовые, рассмотрены.

Допустим, что $a_1a_2 \dots a_w = 0^w$. Тогда для любого $1 < s \leq w$, $s \in \mathbb{N}$, имеем, что слово $a_s a_{s+1} \dots a_w b_1 b_2 \dots b_{s-1}$ содержит префикс из как минимум $Z + 2 + s$ нулей, что противоречит конструкции \widetilde{W}_L^Z .

Остался случай $a_1a_2 \dots a_w \in \widetilde{W}_L^Z$, $b_1b_2 \dots b_w = 0^w$. В случае, если $1 < s \leq Z + 2$ имеем, что на позиции $Z + 3 - s$ в слове

$$a_s a_{s+1} \dots a_w b_1 b_2 \dots b_{s-1}$$

оказывается символ 1, что противоречит тому, что все слова из \widetilde{W}_L^Z имеют префикс из $Z + 2$ нулей. В случае $s = Z + 3$ имеем, что слово $a_{Z+4}a_{Z+5} \dots a_w \in W_L^Z$ содержит в качестве префикса последовательность из $Z + 1$ нуля, что противоречиво. В случае $s > Z + 3$ имеем, что слово $b_1b_2 \dots b_{s-1} = 0^{s-1}$ входит в качестве суффикса в некоторое слово из W_L^Z , что опять противоречиво.

Доказательство леммы закончено.

Для использования леммы 17 требуется построение кодов W_L^Z . Для малых значений L эти коды можно построить полным перебором. Приведем один вариант кода, который будет использоваться в построении далее.

Лемма 18. *Существует двоичный код W_7^2 длины 7, кодовые слова которого не содержат последовательностей из более чем 2 подряд идущих нулей, имеющий объем 81.*

Доказательство. Приведем в явном виде лексикографически упорядоченный список слов, составляющих код W_7^2 .

w01: 0010010	w28: 0110101	w55: 1011101
w02: 0010011	w29: 0110110	w56: 1011110
w03: 0010100	w30: 0110111	w57: 1011111
w04: 0010101	w31: 0111001	w58: 1100100
w05: 0010110	w32: 0111010	w59: 1100101
w06: 0010111	w33: 0111011	w60: 1100110
w07: 0011001	w34: 0111100	w61: 1100111
w08: 0011010	w35: 0111101	w62: 1101001
w09: 0011011	w36: 0111110	w63: 1101010
w10: 0011100	w37: 0111111	w64: 1101011
w11: 0011101	w38: 1001001	w65: 1101100
w12: 0011110	w39: 1001010	w66: 1101101
w13: 0011111	w40: 1001011	w67: 1101110
w14: 0100100	w41: 1001100	w68: 1101111
w15: 0100101	w42: 1001101	w69: 1110010
w16: 0100110	w43: 1001110	w70: 1110011
w17: 0100111	w44: 1001111	w71: 1110100
w18: 0101001	w45: 1010010	w72: 1110101
w19: 0101010	w46: 1010011	w73: 1110110
w20: 0101011	w47: 1010100	w74: 1110111
w21: 0101100	w48: 1010101	w75: 1111001
w22: 0101101	w49: 1010110	w76: 1111010
w23: 0101110	w50: 1010111	w77: 1111011
w24: 0101111	w51: 1011001	w78: 1111100
w25: 0110010	w52: 1011010	w79: 1111101
w26: 0110011	w53: 1011011	w80: 1111110
w27: 0110100	w54: 1011100	w81: 1111111

В этом списке «wNN:» используется как метка к слову под номером NN. В силу лексикографического порядка списка легко проверяется, что все слова в нем различны. Ограничение на количество нулей в словах из списка проверяется его просмотром. Доказательство закончено.

Для полноты изложения приведем без доказательства таблицу объемов кодов W_L^Z для некоторых значений параметров Z и L , а так-

же длины w получающегося кода \widetilde{W}_L^Z . Эта таблица использовалась для подбора параметров L и Z так, чтобы w было минимальным.

w	$ W_L^Z $	L	Z	w	$ W_L^Z $	L	Z
11	15	4	3	13	55	8	1
11	21	6	1	13	56	6	3
11	24	5	2	13	81	7	2
12	29	5	3	14	89	9	1
12	34	7	1	14	108	7	3
12	44	6	2	14	149	8	2

Построенный код \widetilde{W}_7^2 будет использоваться для кодирования множества $(M \cup Q \cup \{bl\}) \times E_2$. Однако, нам при этом понадобится не весь код, а только 77 пар слов, отличающихся цилиндрическими битами. Такие пары слов однозначно задаются общими для них подсловами $b_6 b_7 \dots b_{13}$ кода W_7^2 . Код, полученный из \widetilde{W}_7^2 выбором 77 пар слов, соответствующих словам $w01, w02, \dots, w77$ кода W_7^2 , обозначим через \widehat{W}_7^2 . Очевидно, что код \widehat{W}_7^2 будет антициклическим цилиндрическим кодом.

Доказательство теоремы 1. План доказательства состоит в следующем. Будет построено семейство двумерных клеточных автоматов $\sigma_u, u \in \mathbb{N}, u > 1$, каждый из которых имеет в качестве локальной функции переходов функцию φ , и булева функция φ с 91 переменной. Для σ_u будет доказано, что он не является обратимым тогда и только тогда, когда машина Тьюринга τ_3 из теоремы 2 имеет конечное u -инициальное функционирование. Далее, из неразрешимости проблемы определения по натуральному u имеет ли МТ τ_3 конечное u -инициальное функционирование вытекает неразрешимость проблемы распознавания обратимости в семействе КА σ_u . В силу того, что для всех $u > 1 \sigma_u \in CA(2, 2, m, \varphi)$, в классе $CA(2, 2, m, \varphi)$ свойство обратимости также не разрешимо.

Мы будем моделировать в σ_u КАПС μ_u из леммы 16, при этом σ_u будет обратим тогда и только тогда, когда обратим μ_u . Лемма 16 будет давать сведение остановки МТ к необратимости σ_u .

Для задания клеточного автомата σ_u надо указать его шаблон соседства $\bar{V}^{\star-u}$ и локальную функцию переходов φ . Шаблон $\bar{V}^{\star-u}$ фактически будет представлять из себя шаблон $V^{\star-u}$ относительно

«укрупненного» клеточного автомата, ячейки которого моделируются блоками из 13 последовательно расположенных ячеек σ_u на горизонтали (такие блоки будем называть ячейками). При этом в этих ячейках будут лежать слова кода \widehat{W}_7^2 , и меняться будет только «цилиндрический» бит этого кода. То есть шаблон соседства $\bar{V}^{\star-u}$ должен обеспечивать видимость соседей блоков, кодирующих соседей в μ_u , относительно этой «цилиндрической» ячейки.

При задании шаблона соседства $\bar{V}^{\star-u}$ удобно разбить его вектора на группы, кодирующие видимость клеток по отдельным векторам $V^{\star-u}$, а также соседей внутри клетки, содержащей ячейку, относительно которой считается переход (будем называть такую клетку центральной). Для задания функции φ также будет удобно одновременно с векторами шаблона соседства ввести обозначения переменных функции переходов, которые содержат информацию из окрестности ячейки, доступную по этим векторам.

Группа векторов $v_{c,1}, v_{c,2}, \dots, v_{c,5}, v_{c,7}, \dots, v_{c,13}$ будет кодировать видимость внутри центральной клетки. Вектор $v_{c,6}$ опущен, так как он будет соответствовать цилиндрическому биту, то есть будет нулевым. Определим $v_{c,i}$, $1 \leq i \leq 13$, $i \neq 6$, формулой $v_{c,i} = (i - 6, 0)$. Переменные φ , соответствующие векторам $v_{c,i}$, будем обозначать через $x_{c,i}$. При этом через $x_{c,6}$ будем обозначать переменную, соответствующую значению ячейки, относительно которой вычисляется переход.

Группа векторов $v_{d,1}, v_{d,2}, \dots, v_{d,13}$, $d \in \{e, s, w, sw, n\}$, будет кодировать видимость клеток по направлениям v_d . Определим значения векторов $v_{d,i}$, $1 \leq i \leq 13$ формулами

$$\begin{aligned} v_{e,i} &= (i + 7, 0), \quad v_{s,i} = (i - 6, -1), \quad v_{sw,i} = (i - 19, -1), \\ v_{w,i} &= (i - 19, 0), \quad v_{n,i} = (i - 6, 1). \end{aligned}$$

Соответствующие им переменные будем обозначать через $x_{d,i}$.

Группа векторов $v_{e,1}^u, v_{e,2}^u, \dots, v_{e,13}^u$ будет кодировать видимость клеток по направлению v_e^u . Определим их значения формулами

$$v_{e,i}^u = (i + 13 \cdot (u - 1) + 7, 0).$$

Соответствующие им переменные будем обозначать через $x_{ee,i}$.

С учетом введенных групп векторов шаблон $\bar{V}^{\star-u}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{V}^{\star-u} = & (v_{c,1}, v_{c,2}, \dots, v_{c,5}, v_{c,7}, \dots, v_{c,13}, \\ & v_{e,1}, v_{e,2}, \dots, v_{e,13}, v_{s,1}, v_{s,2}, \dots, v_{s,13}, \\ & v_{sw,1}, v_{sw,2}, \dots, v_{sw,13}, v_{w,1}, v_{w,2}, \dots, v_{w,13}, \\ & v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,13}, v_{ee,1}, v_{ee,2}, \dots, v_{ee,13}). \end{aligned}$$

Нам также понадобится шаблон соседства \bar{V}^c , определяемый следующим образом.

$$\bar{V}^c = (v_{c,1}, v_{c,2}, \dots, v_{c,5}, v_{c,7}, \dots, v_{c,13}).$$

При задании функции φ будем использовать элементарные функции алгебры логики и обозначения из книги [3]. Функция φ будет иметь следующий вид

$$\varphi = x_{c,6} \cdot \bar{\varphi}_I \vee \psi(x_{c,6}, x_{e,6}, \dots, x_{ee,6}, \xi_c, \xi_e, \dots, \xi_{ee}) \cdot \varphi_I,$$

где φ_I — функция целостности кодирования, ψ — локальная функция переходов КА μ_u из леммы 16. Символы ξ_d , $d \in \{c, e, s, w, sw, n, ee\}$, обозначают функции декодирования значений клеток основания.

Функции декодирования значений клеток основания ξ_d зависят от переменных $x_{d,1}, x_{d,2}, \dots, x_{d,13}$ и принимают значения во множестве $M \cup Q \cup \{nul, bad, bl\}$. В случае, если все переменные функции ξ_d равны нулю, ξ_d принимает значение *nul*. Если значение переменных образует не нулевое слово, не принадлежащее коду \widehat{W}_7^2 , ξ_d равна *bad*. Далее, множество $M \cup Q \cup \{bl\}$ состоит из $3+4 \cdot 3+61+1 = 77$ элементов. Сопоставим этим элементам однозначным образом пары слов из \widehat{W}_7^2 , отличающиеся цилиндрическими битами, обозначим получившееся отображение через $\tilde{\xi}$. Если для некоторого элемента $m \in M \cup Q \cup \{bl\}$ значение $\tilde{\xi}(m)$ совпадает с одним из элементов из пары, ξ_d равно m .

Функция целостности кодирования φ_I содержательно проверяет, что значения всех клеток окрестности ячейки α являются либо кодовыми словами из \widehat{W}_7^2 , либо словом 0^{13} , состоящим из 13 нулей, при этом значение $\bar{V}^c(\alpha)$ не равно 0^{13} . В случае, если указанное условие не выполняется, ее значение равно 0, иначе 1. Она может быть представлена как конъюнкция шести дизъюнкций вида

$$\varphi_{I,d} = (\bar{x}_{d,1} \cdot \bar{x}_{d,2} \cdot \dots \cdot \bar{x}_{d,13}) \vee \bigvee_{b_1 b_2 \dots b_{13} \in \widehat{W}_7^2} x_{d,1}^{b_1} \cdot x_{d,2}^{b_2} \cdot \dots \cdot x_{d,13}^{b_{13}},$$

где $d \in \{e, s, w, sw, n, ee\}$, и дизъюнкция

$$\varphi_{I,c} = \bigvee_{b_1 b_2 \dots b_{13} \in \widehat{W}_7^2} x_{c,1}^{b_1} \cdot x_{c,2}^{b_2} \cdot \dots \cdot x_{c,13}^{b_{13}},$$

то есть

$$\varphi_I = \varphi_{I,c} \cdot \varphi_{I,e} \cdot \varphi_{I,s} \cdot \varphi_{I,w} \cdot \varphi_{I,sw} \cdot \varphi_{I,n} \cdot \varphi_{I,ee}.$$

Пусть f — конфигурация КА σ_u . Обозначим через B_f блок ячеек, значения функции декодирования значений клеток ξ_c для \bar{V}^c окрестности которых не лежит в множестве $\{nul, bad\}$, и значение $\bar{V}^{\star-u}$ окрестности удовлетворяет φ_I . Обозначим глобальную функцию переходов КА σ_u через Φ_u . Заметим, что из конструкции φ вытекает, что в образе $f_1 = \Phi_u(f)$ конфигурации f при вычислении перехода КА σ_u могут измениться значения только тех ячеек, которые принадлежат блоку B_f .

Обозначим через B_f^i , $0 \leq i \leq 12$, подблок блока B_f , состоящий из ячеек, значения остатков от деления первой координаты по модулю 13 которых равны i .

Утверждение 19. Для всех натуральных i, j , $0 \leq i < j \leq 12$, множества $\bar{V}^c(B_f^i)$ и $\bar{V}^c(B_f^j)$ не пересекаются.

Докажем утверждение от противного. Действительно, допустим это не так, и нашлась ячейка $\alpha \in \bar{V}^c(B_f^i) \cap \bar{V}^c(B_f^j)$ для некоторых различных i и j , $0 \leq i < j \leq 12$. Тогда найдутся ячейки $\beta_i \in B_f^i$, $\beta_j \in B_f^j$ такие, что $\alpha \in \bar{V}^c(\beta_i)$, $\alpha \in \bar{V}^c(\beta_j)$. Без ограничения общности, положим координаты ячейки β_i равными $(i, 0)$. Тогда координаты ячейки β_j равны либо $(j, 0)$, либо $(j - 13, 0)$.

Рассмотрим случай $\beta_j = (j, 0)$. В силу того, что значение окрестности $\bar{V}^{\star-u}(\beta_i)$ удовлетворяет φ_I , имеем, что значения $x_{i-18}, x_{i-17}, \dots, x_{i+20}$ последовательности ячеек $(i + s, 0)$, $s \in \mathbb{N}$, $-18 \leq s \leq 20$, в конфигурации f представляют из себя конкатенацию трех слов w_1, w_2, w_3 из множества $\widehat{W}_7^2 \cup \{0^{13}\}$, при этом центральное из этих слов w_2 не равно 0^{13} . Аналогично, значения $x_{j-18}, x_{i-17}, \dots, x_{j+20}$, ячеек

$(j + s, 0)$, $s \in \mathbb{N}$, $-18 \leq s \leq 20$, в конфигурации f представляют из себя конкатенацию трех слов w'_1 , w'_2 , w'_3 из множества $\widehat{W}_7^2 \cup \{0^{13}\}$.

Имеем следующую картину:

$$\overbrace{x_{i-18} \dots x_{j-19}}^{w_1} \underbrace{x_{j-18} \dots x_{i-6}}_{w'_1} \overbrace{x_{i-5} \dots x_{j-6}}^{w_2} \underbrace{x_{j-5} \dots x_{i+6}}_{w'_2} x_{i+7} \dots x_{j+6}.$$

Имеем противоречие со свойством антицикличности кода \widehat{W}_7^2 для слова w_2 . В случае $\beta_j = (j - 13, 0)$ обозначим $i' = j - 13$, $j' = i$, и проведем аналогичное рассуждение. Все случаи приведены к противоречию, следовательно при разных i множества $\bar{V}^c(B_f^i)$ не пересекаются.

Утверждение 19 доказано.

Будем доказывать эквивалентность свойства обратимости μ_u и σ_u в два этапа — сначала что из необратимости μ_u вытекает необратимость σ_u , потом что из необратимости σ_u вытекает необратимость μ_u .

Утверждение 20. Пусть для некоторого $u \in \mathbb{N}$, $u > 1$, КАПС μ_u не обратим. Тогда КА σ_u также не обратим.

Из леммы 16 вытекает, что необратимость μ_u эквивалентна существованию у машины Тьюринга τ_3 конечного u -инициального функционирования. По лемме 10 можно предъявить график вычисления Γ , узор $G(\Gamma)$ которого представляет из себя ориентированный цикл, при этом множество вершин $G(\Gamma)$ совпадает с множеством всех ненулевых ячеек Γ . Построенная по Γ конфигурация g^0 КАПС μ_u с нулевыми значениями компонент активного состояния будет иметь два прообраза — саму g^0 и конфигурацию g^1 , получающуюся присвоением активным состояниям ячеек-вершин $G(\Gamma)$ значения 1.

Далее, поставим в соответствие ячейке $\alpha = (x, y)$ КАПС μ_u набор из 13 ячеек $\mathcal{B}_\alpha = ((13 \cdot x - 5, y), (13 \cdot x - 4, y), \dots, (13 \cdot x + 7, y))$. При этом для состояния f КА σ_u будем обозначать через $f(\mathcal{B}_\alpha)$ набор значений ячеек блока B в порядке их следования в наборе \mathcal{B}_α , то есть $(f(13 \cdot x - 5, y), f(13 \cdot x - 4, y), \dots, f(13 \cdot x + 7, y))$.

Зададим отображение кодирования Θ состояний КАПС μ_u состояниями КА σ_u . Пусть g — состояние μ_u , $g(\alpha) = (b, m)$, где $b \in E_2$,

$m \in M \cup Q \cup \{bl, nul, bad\}$. Зададим отображение Θ значениями его результата на наборах ячеек B_α .

Если $m \in M \cup Q \cup \{bl\}$, то $\Theta(g)(B_\alpha) \in \tilde{\xi}(m)$, при этом $\Theta(g)((13 \cdot x, y)) = b$, где $(x, y) = \alpha$. То есть элемент из пары $\tilde{\xi}(m)$ выбирается таким образом, чтобы значение цилиндрического бита совпало с b .

Если $m = nul$, то значения отображения кодирования есть конкатенация значения b , префикса из 5 нулей и суффикса из 7 нулей, то есть $\Theta(B_\alpha) = 0^5b0^7$. Если $m = bad$, то $\Theta(B_\alpha) = 1^5b1^7$.

Рассмотрим образы $f^0 = \Theta(g^0)$ и $f^1 = \Theta(g^1)$ при отображении кодирования. Заметим, что конфигурации g^0 и g^1 не содержат ячеек со значениями $(0, bad)$, $(1, bad)$, $(1, nul)$, то есть значения всех блоков B_α лежат во множестве $\{0^13\} \cup \widehat{W}_7^2$. Из утверждения 19 имеем, что $B_{f^0} = B_{f^1} = B_{f^0}^0$, то есть в процессе вычисления Φ_u в конфигурациях поменяются только циклические биты кодовых слов. Далее, в силу задания φ , имеем $\Phi_u(f^0) = \Phi_u(f^1) = f^0$, то есть σ_u не является обратимым.

Утверждение 20 доказано.

Для доказательства импликации, обратной к утверждению 20, нам понадобится более подробно изучить свойства блоков B_f^i .

Утверждение 21. Пусть f – конфигурация КА σ_u . Тогда не может быть такого, что для некоторых $0 \leq i, j \leq 12$, $i \neq j$, выполнялось $\beta \in \bar{V}^{\star-u}(B_f^i) \cup \bar{V}^c(B_f^j)$, $f(\beta) \neq 0$.

Данное утверждение является усилением утверждения 19 и доказывается аналогично ему. Действительно, пусть найдется ячейка β , $\beta \in \bar{V}^{\star-u}(B_f^i) \cup \bar{V}^c(B_f^j)$. Случай $\beta \in \bar{V}^c(B_f^j)$ не возможен по утверждению 19, следовательно $\beta \in \bar{V}^{\star-u}(B_f^i) \setminus \bar{V}^c(B_f^i)$.

Пусть $\beta \in \bar{V}^c(\beta')$, $\beta' \in B_f^j$. По определению B_f^j окрестность $\bar{V}^{\star-u}(\beta')$ содержит своими значениями на строке с ячейкой β' три кодовых слова из множества $\widehat{W}_7^2 \cup \{0^{13}\}$, их цилиндрические биты «выровнены» по модулю j , и центральное слово w' не является нулевым. При этом ячейка β находится в центральном слове. По определению B_f^i ячейка β принадлежит кодовому слову w из $\widehat{W}_7^2 \cup \{0^{13}\}$, цилиндрические биты которого «выровнены» по модулю i . Имеем противоречие со свойством строгой ацикличности кода \widehat{W}_7^2 .

Утверждение 21 доказано.

Утверждение 22. Пусть f_1, f_2 — конфигурации клеточного автомата σ_u , $f_2 = \Phi_u(f_1)$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq 12$, $B_{f_1}^i = B_{f_2}^i$.

В силу конструкции функции φ в процессе работы КА σ_u меняться могут только состояния ячеек, являющиеся цилиндрическими битами ненулевых кодовых слов из \widehat{W}_7^2 , в окрестности которых находятся кодовые слова из $\widehat{W}_7^2 \cup \{0^{13}\}$. В силу утверждения 19 различные кодовые слова не пересекаются, в силу утверждения 21 окрестности относительно шаблона $\bar{V}^{\star-u}$ для них не пересекаются, следовательно кодовые биты, не являющиеся цилиндрическими, в $\bar{V}^{\star-u}$ окрестности ячейки из блока $B_{f_1}^i$ изменятся не могут. Следовательно, $B_{f_1}^i = B_{f_2}^i$.

Утверждение 22 доказано.

Утверждение 23. Пусть f_1, f_2 — конфигурации КА σ_u , $\Phi_u(f_2) = \Phi_u(f_1)$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq 12$, $B_{f_1}^i = B_{f_2}^i$.

Рассмотрим конфигурацию f_3 такую, что $\Phi_u(f_1) = f_3$. В силу утверждения 22 $B_{f_3}^i = B_{f_1}^i$, а также $B_{f_2}^i = B_{f_3}^i$ (так как $\Phi_u(f_2) = \Phi_u(f_1) = f_3$). Из этих равенств имеем $B_{f_1}^i = B_{f_2}^i$.

Утверждение 23 доказано.

Утверждение 24. Пусть КА σ_u не обратим для некоторого $u \in \mathbb{N}_0$, $u > 1$. Тогда существуют различные конфигурации f_1, f_2 такие, что $\Phi_u(f_2) = \Phi_u(f_1)$, $B_{f_1} = B_{f_2} = B_{f_1}^0$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2$, $\alpha \notin \bar{V}^{\star-u}(B_{f_1}^0)$: $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$.

В силу не обратимости КА существуют различные конфигурации f'_1, f'_2 такие, что $\Phi_u(f'_2) = \Phi_u(f'_1)$. В силу утверждения 23 имеем $B_{f'_1} = B_{f'_2}$. По определению φ меняться в процессе работы КА σ_u могут только состояния ячеек, принадлежащие $B_{f'_1}$, то есть найдется ячейка α в $B_{f'_1}$ такая, что $f'_1(\alpha) \neq f'_2(\alpha)$. Так как $B_{f'_1}$ является объединением непересекающихся множеств $B_{f'_1}^i$, $0 \leq i \leq 12$, найдется i_1 , что $\alpha \in B_{f'_1}^{i_1}$.

Рассмотрим конфигурации f''_1 и f''_2 , получающиеся сдвигом на вектор $(-i_1, 0)$ из f'_1 и f'_2 соответственно. Для этих конфигураций по прежнему справедливо $\Phi_u(f''_2) = \Phi_u(f''_1)$, но для них значение на блоке $B_{f''_1}^0$ различны.

Далее, рассмотрим конфигурации f'''_1 и f'''_2 , совпадающие с f''_1 и f''_2 на блоке $\bar{V}^{\star-u}(B_{f''_1}^0)$, и тождественно равные нулю вне его. В силу утверждения 21 имеем, что для всех ячеек α из блока $\bar{V}^{\star-u}(B_{f''_1}^0)$

справедливо $\Phi_u(f_2''')(\alpha) = \Phi_u(f_1''')(\alpha)$, а также $B_{f_1'''}^i = \emptyset$, $1 \leq i \leq 12$. Вне блока $\bar{V}^{\star-u}(B_{f_1'''}^0)$ в силу определения φ значения конфигураций $\Phi_u(f_2''')$ и $\Phi_u(f_1''')$ тождественно равны нулю. Полученные конфигурации f_1''' и f_2''' — искомые.

Утверждение 24 доказано.

Утверждение 25. Пусть для некоторого $u \in \mathbb{N}$, $u > 1$, КА σ_u не обратим. Тогда КАПС μ_u также не обратим.

Возьмем конфигурации f_1 и f_2 КА σ_u , построенные в утверждении 24. Покажем, что по ним можно построить различные конфигурации g_1 и g_2 КАПС μ_u такие, что их образы при вычислении глобальной функции переходов КАПС μ_u совпадают. Из этого будет вытекать необратимость КАПС μ_u и справедливость доказываемого утверждения.

Зададим отображение декодирования Θ^{-1} состояния КА σ_u в состояние μ_u . Пусть f — состояние σ_u . Будем ставить в соответствие наборам из 13 ячеек $\mathcal{B}_\alpha = ((13 \cdot x - 5, y), (13 \cdot x - 4, y), \dots, (13 \cdot x + 7, y))$ КА σ_u ячейку $\alpha = (x, y)$ КАПС μ_u . Определим отображение декодирования формулой

$$\Theta^{-1}(f)((x, y)) = (f((13 \cdot x, y)), \\ \xi_c(f((13 \cdot x - 5, y)), \dots, f((13 \cdot x + 7, y)))).$$

Обозначим $g_1 = \Theta^{-1}(f_1)$, $g_2 = \Theta^{-1}(f_2)$. В силу того, что $B_{f_1} = B_{f_2} = B_{f_1}^0$ и вне блока $\bar{V}^{\star-u}(B_{f_1}^0)$ конфигурации f_1 и f_2 тождественно нулевые, при преобразовании Θ^{-1} будет потеряна только информация о точных значениях кодов дефектных ячеек (если такие в g_1 и g_2 есть). Однако, данная информация не влияет на значения битов активного состояния при вычислении переходов μ_u , следовательно образы конфигураций g_1 и g_2 при вычислении глобальной функции переходов КАПС μ_u совпадают.

Утверждение 25 доказано.

Перейдем к доказательству теоремы.

Число переменных функции φ непосредственно вытекает из ее построения.

Неразрешимость свойства обратимости в классе КА $\{\sigma_u | u \in \mathbb{N}, u > 1\}$ в соответствии с доказанными выше утверждениями 25 и 20

эквивалентно неразрешимости свойства обратимости в классе КАПС $M = \{\mu_u | u \in \mathbb{N}, u > 1\}$. В соответствии с леммой 16 неразрешимость свойства обратимости КАПС в классе M эквивалентна неразрешимости проблемы определения существования у машины Тьюринга τ_3 конечного u -инициального функционирования. Неразрешимость указанной проблемы для машины Тьюринга τ_3 является утверждением теоремы 2.

Доказательство теоремы 1 закончено.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. — М.: Наука, 1990.
- [2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
- [3] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2002.
- [4] Кучеренко И. В. О разрешимости обратимости клеточных автоматов // Интеллектуальные системы. — 2004. — Т. 8, вып. 1-4. — С. 465–482.
- [5] Кучеренко И. В. О структуризации класса обратимых бинарных клеточных автоматов // Интеллектуальные системы. — 2005. — Т. 9, вып. 1-4. — С. 445–456.
- [6] Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1980.
- [7] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1986.
- [8] Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. — М.: Вильямс, 2002. — ISBN 0–201–44124–1.
- [9] Рогожин Ю. В. Семь универсальных машин Тьюринга // Математические исследования. — 1982. — 69. — С. 76–90.
- [10] Hopcroft J. E., Motwani R., Ullman J. D. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd ed.) — Addison-Wesley, 2000. — ISBN 0–201–44124–1.
- [11] Amoroso S., Patt Y. N. Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures // Journal

- of Computer and System Sciences. — 1972. — Vol. 6, no. 5. — P. 448–464.
- [12] Sutner K. Linear cellular automata and De Bruijn automata // Cellular Automata: a parallel model / Delorme M., Mazoyer J., Eds. — Kluwer, 1998. — P. 303–319.
- [13] Kari J. Reversibility of 2D cellular automata is undecidable // Physica D. — 1994. — 45. — P. 379–385.
- [14] Durand B. Inversion of 2D cellular automata: some complexity results // Theoretical Computer Science. — 1994. — Vol. 134, no. 2. — P. 387–401.
- [15] Rogozhin Y. Small universal Turing machines // Theoretical Computer Science. — 1996. — Vol. 168, no. 2. — P. 215–240.
- [16] Neary T., Woods D. Four Small Universal Turing Machines // Fundamenta Informaticae. — 2009. — 91. — P. 105–126.