

Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы

Г. В. Калачев

В статье рассматривается мощность плоских схем, моделирующих СБИС. Плоская схема является укладкой схемы из функциональных элементов на двумерную целочисленную сетку. Все оценки мощности для плоских схем верны и для более сложных моделей СБИС. Рассматриваемая мера мощности моделирует электрическую мощность, выделяемую как на логических элементах, так и на проводах схемы. При этом предполагается, что электрическая мощность, потребляемая проводом единичной длины соизмерима с мощностью, потребляемой одним логическими элементом. Получена нижняя оценка $\frac{m\sqrt{|D|}}{\sqrt{\min(m, \log |D|)}}$ средней мощности почти всех частичных булевых операторов с областью определения D и m выходами. Также получены нижние оценки мощности при некоторых ограничениях на расположение выходов схемы.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, модель СБИС, плоские схемы, мощность схем, функция Шеннона, нижние оценки, частичные булевы операторы.

1. Введение

С. С. Кравцов в статье [1] ввел понятие схемы из клеточных элементов, далее также называемых плоскими схемами, и доказал, что для реализации произвольной булевой функции такой схемой требуется $O(2^n)$ элементов, причем существуют функции, для реализации которых необходимо порядка 2^n элементов. В статье [2] определены две меры мощности схем, и показана связь между ними.

В данной работе доказывается обобщение нижней оценки, полученной в [2, теорема 1] на случай булевых операторов с n входами и m выходами, где $m = 2^{o(2^n)}$, а также частичных булевых операторов, определенный на области $D \subset \{0, 1\}^n$. Случай $m \leq n$ для всюду определенных операторов следует из [2, лемма 14], однако в случае $m > n$ нижняя оценка получается выше и зависит от ограничений на расположение выходов схемы. Из теоремы, доказанной в данной работе следует, в частности, что оценка мощности квадратных схемах с оптимальной по порядку площадью равна $\frac{m\sqrt{m}}{n}2^{n/2}$ и выше, чем нижняя оценка без ограничений, которая равна $\frac{m}{\sqrt{n}}2^{n/2}$ при $m > n$.

Для частичных операторов верны аналогичные оценки, а именно, во всех формулах для всюду определенных операторов нужно вместо n подставить $\log_2 |D|$, хотя доказательство для частичных операторов существенно сложнее. В частности, для почти всех частичных операторов мощность по порядку не меньше $\sqrt{m|D|}$ в случае $m \leq \log_2 |D|$ и $\frac{m\sqrt{|D|}}{\log_2 |D|}$ в случае $m > \log_2 |D|$. Единственным ограничением является условие $n \log_2 n = o(|D|)$, $\log_2 m = o(|D|)$.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и внимание к работе.

2. Определения и обозначения

2.1. Плоские схемы

Клеточным элементом будем называть булев оператор, у которого в сумме не более четырех входов и выходов, причем каждому его входу и каждому выходу сопоставлена некоторая метка из множества $\{l, r, t, b\}$, причем метки не повторяются.

Метки будем также называть сторонами элемента:

- l — левая сторона;
- r — правая сторона;
- t — верхняя сторона;
- b — нижняя сторона.

Клеточный элемент будем изображать в виде единичного квадрата на плоскости. При этом входам и выходам элемента сопоставляются стороны квадрата в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами (выходами)* элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть изоляторами. Множество входов (выходов) элемента e будем обозначать $in(e)$ ($out(e)$).

Входы и выходы элемента будем называть его *контактами*.

Заметим, что это определение немного отличается от обычного тем, что допускается, чтобы на разных выходах реализовывались разные нетождественные функции.

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе — *логическим*.

Коммутационный элемент соответствует либо проводнику в микросхеме, либо пересечению проводов, либо тождественной функции, служащей для усиления сигнала.

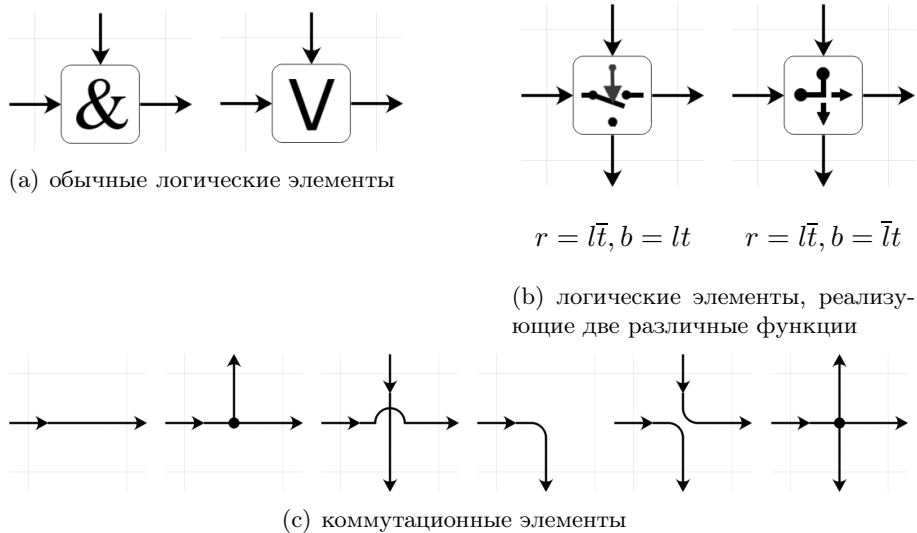


Рис. 1. Примеры клеточных элементов.

Описывать элемент будем уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки

(l, r, t или b). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую будут входить только входные метки.

На рисунке 1 приведены примеры клеточных элементов.

Для удобства введем пустой клеточный элемент — изолирующий (будем обозначать λ).

Всюду далее значок $:=$ будет обозначать «по определению равно».

За E обозначим множество всех клеточных элементов, $N_E := |E|$.

Сетью из клеточных элементов на множестве $M \subset \mathbb{Z}^2$ над множеством $E' \subseteq E$ будем называть отображение $K : M \rightarrow E'$, при этом E' будем называть базисом сети.

Элемент $K(x, y)$ будем называть элементом схемы K с координатами (x, y) . Элемент с приписанными ему координатами будем называть элементом схемы.

Левой, правой, верхней и нижней сторонами элемента e с координатами (x, y) будем называть точки с координатами $(x - \frac{1}{2}, y)$, $(x + \frac{1}{2}, y)$, $(x, y - \frac{1}{2})$ и $(x, y + \frac{1}{2})$ соответственно (на рисунках ось y будет направлена вниз).

Будем говорить, что сеть K из клеточных элементов корректна, если для любых двух элементов x и y схемы K верно, что если сторона a элемента x совпадает со стороной b элемента y , то выполнено одно из условий:

- один из элементов x, y — изолирующий,
- стороны a и b являются изоляторами,
- либо среди них одна является входом, другая — выходом, например, a — выход, а b — вход, в таком случае будем говорить, что выход a подключен к входу b ;

Множество M будем называть носителем сети K .

Введем понятие графа корректной сети из клеточных элементов K (будем обозначать G_K). G_K — ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины a в вершину b ведет ребро в том и только том случае, когда существует элемент e такой, что a является его входом, b — выходом, причем функция, реализуемая на выходе b , существенно зависит от входа a .

Плоской схемой или *схемой из клеточных элементов* на множестве $M \subset \mathbb{Z}^2$ над базисом $E' \subseteq E$ будем называть корректную сеть из клеточных элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество M будем называть *носителем* схемы K .

Далее везде по умолчанию используем базис E , то есть считаем, что у нас есть все клеточные элементы.

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом* (*выходом*) схемы.

Контактами схемы будем называть ее входы и выходы. Множество входов (выходов) схемы K будем обозначать $In(K)$ ($Out(K)$).

Узлами схемы K будем называть вершины графа G_K .

Если M — носитель схемы K , то величину $|M|$, равную количеству элементов множества M , будем называть *площадью* схемы K и обозначать $|K|$.

Расстоянием между узлами схемы будем называть расстояние между соответствующими вершинами в G_K .

Расстояние от узла a до узла b на схеме K будем обозначать $\rho_K(a, b)$.

Подсхемой схемы K с носителем $M_0 \subseteq M$ будем называть схему $K|_{M_0}$, получающуюся из K выбрасыванием клеточных элементов, соответствующих множеству $M \setminus M_0$. Если схема K фиксирована, то иногда будем говорить просто подсхема M_0 .

Каждой плоской схеме K можно сопоставить схему из функциональных элементов $Circ(K)$ следующим образом:

- 1) каждой функции $f_{s,i}$, которую реализует i -й выход элемента s клеточной схемы, сопоставим функциональный элемент $e_{s,i}$, реализующий $f_{s,i}$; если i -й и j -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если i -й выход s_1 подключен к j -му входу s_2 соединим выход элемента $e_{s_1,i}$ с j -ми входами элементов $e_{s_2,k}$ для всех k , для которых $f_{s_2,k}$ зависит от j -го аргумента;
- 3) удалим из схемы все тождественные функции, подсоединив их вход ко всем их выходам.

Будем говорить, что схема K реализует булев оператор F_K , если схема из функциональных элементов $Circ(K)$ реализует F_K .

Назовем схему K минимальной над базисом $E' \subseteq E$, если она обладает минимальной площадью среди всех схем над базисом E' , реализующих F_K .

Обозначим $S_{E'}(F)$ площадь минимальной схемы, реализующей оператор F . Если $E' = E$, то будем просто писать $S(F)$.

Будем говорить, что плоские схемы K_1 и K_2 равны и писать $K_1 = K_2$, если существует параллельный перенос плоскости, который позволяет совместить схемы K_1 и K_2 , иначе будем говорить, что K_1 и K_2 различны.

Замечание. Обычно, когда рассматривают плоские схемы, предполагается, что они имеют форму прямоугольника, и входы и выходы расположены по периметру. Но здесь мы не накладываем ограничения на геометрию схемы, поскольку схема, реализующая булеву функцию может быть частью большой схемы, реализующей булев оператор. А ограничения на геометрию есть лишь для всей схемы устройства, а не для ее составных частей.

2.2. Мощность схем

Для каждой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию ее узлов. На i -м узле реализуется некоторая функция g_i от входных переменных схемы K (на входах считаем, что реализуются тождественные функции).

Везде далее будем считать, что схема K имеет n входов, l узлов и g_i — функция, реализуемая в i -м узле схемы K .

Состоянием схемы K на входном наборе x назовем вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$, обозначим $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$.

Пусть схема K имеет n входов. Тогда

Потенциалом схемы K на входном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ назовем величину $u_K(x) := |s_K(x)|$.

Потенциалом схемы K на входном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ назовем величину $u_K(x) := |s_K(x)|$.

Средним потенциалом схемы K на множестве входных наборов $D \subseteq \{0, 1\}^n$ назовем $U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x)$. В случае $D = \{0, 1\}^n$ будем обозначать просто $U(K)$, то есть $U(K) := U_{\{0,1\}^n}(K)$.

Пусть $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ — частичный булев оператор. Тогда $U(f) := \min_{K:F_K=f} U_D(K)$.

Обозначим $P_2(D, m)$ — множество частичных булевых операторов $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ с m выходами, определенных на множестве D .

Обозначим $P_2(n, m) := P_2(\{0, 1\}^n, m)$ — множество всюду определенных булевых операторов с n входами и m выходами.

Также введем функцию Шеннона для булевых операторов.

$$U(D, m) := \max_{f \in P_2(D, m)} U(f); \quad U(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U(f);$$

Замечание. В работе [2] наряду со средним потенциалом были введены другие меры мощности, такие как максимальный потенциал, средняя мощность и максимальная мощность. В [2, теорема 1] показана связь между этими мерами мощности, поэтому оценки, полученные в этой работе можно обобщить и на другие меры мощности.

3. Результаты

Теорема 1. Если $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $n \rightarrow \infty$, $m = 2^{o(|D|)}$, $n^2 = o(|D|)$, то выполнено

$$U(D, m) \gtrsim \frac{m\sqrt{|D|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |D|)}}.$$

Эта общая оценка для случая, когда мы никак не ограничиваем геометрию схемы. Однако, если $m > n$, то при некоторых ограничениях на расположение выходов можно получить более высокую нижнюю оценку.

Поэтому сформулируем обобщение нижней оценки для случая с ограничением на расположение выходов. Если рассматриваются лишь схемы из некоторого множества P (которое может зависеть от f), то будем ко всем мерам сложности и мощности добавлять нижний индекс P . Нас интересует средний потенциал:

$$U_P(f) := \min_{K \in P(f): F_K = f} U(K), \quad U_P(D, m) := \\ := \max_{f \in P_2(D, m)} U_P(f), \quad U_P(n, m) := U_P(\{0, 1\}^n, m).$$

Если $\{K \in P(f) : F_K = f\}$ пусто, то формально полагаем $U_P(f) = \infty$.

Деревом выходов схемы K назовем минимальное остовное дерево полного графа с вершинами в выходных элементах схемы K , причем расстояние между элементами — расстояние между их центрами по манхэттенговской метрике.

Введем величину $T(K)$. Пусть m — количество выходов схемы K , числа r_1, \dots, r_{m-1} — длины ребер дерева выходов в порядке возрастания.

Положим $T(K) := \sum_{j=1}^{m-2} \lceil \frac{r_j}{2} \rceil + 2 \lceil \frac{r_{m-1}}{2} \rceil$. То есть $T(K)$ — величина, равная по порядку суммарной длине ребер дерева выходов.

Введем множество $T[l, h](f) = \{K : l(m, d) \leq T(K) \leq h(m, d)\}$, где d — размер области определения f , m — число выходов f .

Теорема 2. *Если $l, h : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — некоторые функции такие, что $l(m, n) \leq h(m, n)$, то существуют такие константы C_1, C_2, C_3, C_4 , не зависящие от l и h такие, что неравенство*

$$U_{T[l, h]}(f) \geq \begin{cases} C_1 \frac{m\sqrt{m}2^{n/2}}{n}, & \text{если } h(m, 2^n) < \sqrt{m}2^{n/2}; \\ C_2 \frac{m^2 2^n}{nh(m, 2^n)}, & \text{если } \sqrt{m}2^{n/2} \leq h(m, 2^n) < \frac{m2^{n/2}}{\sqrt{n}}; \\ C_3 \frac{m2^{n/2}}{\sqrt{n}}, & \text{если } l(m, 2^n) \leq \frac{m2^{n/2}}{\sqrt{n}} \leq h(m, 2^n); \\ C_4 l(m, 2^n), & \text{если } l(m, 2^n) > \frac{m2^{n/2}}{\sqrt{n}}; \end{cases}$$

выполнено для почти всех $f \in P_2(n, m)$ при $n \rightarrow \infty$, $m = 2^{o(2^n)}$.

Для частичных операторов аналог последнего случая неверен, поэтому сформулируем отдельную теорему.

Теорема 3. Если $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $d = |D|$, то существует такая константа C , не зависящая от l и h такая, что неравенство

$$U_{T[0,h]}(f) \geq \begin{cases} C \frac{m\sqrt{md}}{n}, & \text{если } h(m, d) < \sqrt{md}; \\ C \frac{m^2d}{nh(m, d)}, & \text{если } \sqrt{md} \leq h(m, d); \end{cases}$$

выполнено для почти всех $f \in P_2(D, m)$ при $n \rightarrow \infty$, $n \log_2 n = o(|D|)$, $m = 2^{o(|D|)}$.

Отсюда легко получить нижние оценки для схем с наиболее естественной конфигурацией.

Следствие 1. Для почти всех операторов $f \in P_2(D, m)$ будут выполнены нижние оценки:

- 1) $U_{R[p]}(f) \gtrsim \frac{m^2d}{p \log_2 d}$, где $R[p]$ — множество прямоугольных схем с периметром не больше $p(m, d)$, выходы которых расположены на границе ($h(m, d) = p(m, d)$);
- 2) $U_{S_q}(f) \gtrsim \frac{m\sqrt{md}}{\log_2 d}$, где S_q — множество квадратных схем с площадью по порядку не больше md , выходы которых расположены на границе ($h(m, d) \asymp \sqrt{md}$);
- 3) $U_{N_r}(f) \gtrsim \frac{m\sqrt{md}}{\log_2 d}$, где N_r — множество схем, выходы которых расположены рядом ($h(m, d) = m$).

4. Доказательство

4.1. Идея и схема доказательства для случая $m > n$

Сначала поясним неформально общую идею доказательства на примере всюду определенных операторов в случае $m > n$. В процессе формализации доказательства обнаруживается много тонких моментов, и за этими моментами трудно разглядеть его суть. Поэтому сначала приведем набросок доказательства, в котором много логических пробелов, но зато суть будет более прозрачной.

Рассмотрим схему K , реализующую оператор f . Для каждого r схему можно разбить на две части:

K_r — часть схемы, находящаяся на расстоянии не более r от выхода;
 $\overline{K_r}$ — оставшаяся часть схемы.

Множество входов K_r , являющихся выходами $\overline{K_r}$, обозначим I_r , а их количество h_r .

За s_r обозначим площадь K_r .

Такой площади хватает лишь для того, чтобы построить не более C^{s_r} различных операторов (лемма 3 и некоторые ограничения на m и n дают такую оценку). С другой стороны, оператор, реализуемый схемой, можно представить условно в виде $K_r(x, G(x))$, где $G(x)$ — оператор, реализуемый на множестве узлов I_r . Суть заключается в том, что если r не очень велико, пока $S(K_r)$ существенно меньше, чем $m2^n$, то большую часть оператора вычисляет подсхема $\overline{K_r}$, результат работы которой должен пройти через узлы I_r . Причем чем меньше разрез, тем больше должно быть единиц на них, чтобы пропустить один и тот же объем информации.

Пусть u_r — средний потенциал на множестве I_r . Если мы разрешим не более u_r единиц на контактах I_r , то множество всевозможных значений оператора G будет по порядку не больше, чем $h_r^{u_r}$ (каждую из r единиц мы можем поставить на любое из h_r мест, они могут совпадать — тогда потенциал будет меньше r). Отсюда количество всевозможных операторов $G : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{h_k}$ с потенциалом на выходе не больше u_r , не больше, чем $h_r^{u_r 2^n}$ (Более точная оценка будет получена в лемме 1). Таким образом, мы можем образовать не более $C^{s_r} h_r^{u_r 2^n}$ операторов, а мы хотим реализовать все 2^{m2^n} операторов. Тогда максимум u_r по всем операторам должен быть таким, чтобы

$$C^{s_r} h_r^{u_r 2^n} \geq 2^{m2^n} \Rightarrow u_r \log_2 h_r \geq m - \frac{s_r \log_2 C}{2^n} \Rightarrow u_r \geq \frac{m - \frac{s_r}{2^n} \log_2 C}{\log_2 h_r}. \quad (1)$$

Пусть r_0 такое, чтобы $m - \log_2 C \frac{s_{r_0}}{2^n} \approx \frac{m}{2}$. Ясно, что $s_{r_0} \approx \frac{m2^n}{2 \log_2 C} \asymp m2^n$. Тогда

$$\begin{aligned} U(K) &\geq \sum_{r=0}^{r_0} u_r \gtrsim \sum_{r=0}^{r_0} \frac{m(r_0 + 1)}{2 \log_2 h_r} \gtrsim \frac{mr_0}{2 \log_2 \max_r h_r} \gtrsim \\ &\gtrsim \frac{mr_0}{2(\log_2 m + n)} \asymp \frac{mr_0}{n} \text{ при } m \leq 2^n, \end{aligned}$$

поскольку $\max_{r \leq r_0} h_r \asymp \max_{r \leq r_0} s_r = s_{r_0} \asymp m2^n$. Это рассуждение проясняет, откуда берется оценка, однако некорректно, поскольку мы здесь считали максимум u_r отдельно для каждого конкретного r , а потом все просуммировали. Чтобы сделать его корректным, нужно оценивать число схем, для которых неравенство 1 не выполнено для каждого r по отдельности, просуммировать и понять, что всего таких схем будет $o(2^{m2^n})$, что и проделано в леммах 4 и 5. Также там оценки более точные, за счет чего удается заменить предположение $m \leq 2^n$ на более слабое $m = 2^{o(2^n)}$.

Но такой оценки недостаточно, поскольку если выходы расположены далеко друг от друга, то $s_r \asymp mr^2$, поэтому

$$r_0 \asymp \sqrt{\frac{s_{r_0}}{m}} \asymp \sqrt{\frac{m2^n}{m}} = 2^{n/2} \Rightarrow \frac{mr_0}{n} \asymp \frac{m2^{n/2}}{n}.$$

Тогда получаем оценку $U(K) \gtrsim \frac{m2^{n/2}}{n}$, что в \sqrt{n} раз меньше, чем нужно.

Так получается в том случае, если величина s_r достаточно велика, а это происходит, когда все выходы расположены далеко друг от друга, и множества, отстоящие на расстояние r от выходов почти не перекрываются. Однако когда много таких неперекрывающихся множеств — компонент связности K_r , то в каждую компоненту связности нужно вести сигналы от внешней части схемы так, чтобы на входе каждой компоненты была хотя бы одна единица. Иначе, если на входах будет тождественный 0 на почти всех наборах, то выходы компоненты будут зависеть лишь от тех входов, которые в ней лежат. Но операторов, у которых есть такие выходы, мало, и мы будем рассматривать те, у которых каждый выход зависит от каждого входа на большей части наборов остальных переменных (почти все операторы такие — леммы 16 и 10). Получится, что средний потенциал на границе каждой компоненты не меньше какой-то константы c , а значит потенциал на множестве I_r не меньше, чем ck_r , где k_r — число компонент связности K_r . Опять суммируя по r , получаем, что $U(K) \geq \sum_{j=1}^{r_0} ck_r$. Значит

$$U(K) \gtrsim \max \left(\frac{mr_0}{n}, \sum_{j=1}^{r_0} k_r \right).$$

Итак, мы знаем, что если первый аргумент максимума имеет порядок $\frac{m2^n}{n}$, то большинство k_r будут порядка m , и вся сумма будет порядка $mr_0 \asymp m2^{n/2}$. Если все выходы будут рядом, то $s_r \asymp r(r+m) \leq (r+m)^2$, и $r_0 \asymp \sqrt{m2^n} - m \asymp \sqrt{m2^{n/2}}$ при $m = o(2^n)$. И в этом случае первый аргумент максимума будет порядка $\frac{m\sqrt{m2^{n/2}}}{n}$, а второй — наоборот порядка $r_0 \asymp \sqrt{m2^{n/2}}$. Из этого примера можно заключить, что есть какая-то связь между величинами $\frac{mr_0}{n}$ и $\sum k_r$, и когда первая величина возрастает, то вторая убывает.

Связь можно выявить, найдя некоторый параметр, через который можно оценить обе величины. Таким параметром является сама величина $\sum_{j=0}^r k_r$, которую мы обозначим $\varphi(r)$. Например, можно заметить, что при увеличении r на 1 длина границы связного множества увеличивается не больше, чем на 8 (лемма 6). Значит $d_{r+1} \leq d_r + 8k_r$ (где d_r — длина границы K_r), поэтому по индукции можно показать, что $d_r \leq 8\varphi(r-1) \asymp \varphi(r)$. А поскольку $s_{r+1} \leq s_r + h_r = s_r + 8\varphi(r-1)$, $s_0 = 0$, то $s_r \leq 8r\varphi(r-1) \asymp r\varphi(r)$ (более аккуратно в лемме 7). Теперь у нас все выражено через $\varphi(r)$, и, подставляя в формулы, получим

$$r_0 \asymp \frac{s_{r_0}}{\varphi(r_0)} \asymp \frac{m2^n}{\varphi(r_0)}, \quad \Rightarrow \quad \frac{mr_0}{n} \asymp \frac{m^2 2^n}{\varphi(r_0)n}.$$

Теперь уже легко получить нужную оценку. Если обозначить $\varphi(r_0)$ за z , то $U(K) \asymp \max\left(\frac{m^2 2^n}{zn}, z\right)$. Теперь достаточно найти минимум этого выражения по z , который достигается в случае равенства аргументов максимума, поскольку первый аргумент убывает по z , а второй — возрастает. То есть

$$z_0^2 = \frac{m^2 2^n}{n} \Rightarrow U(K) \asymp z_0 \asymp \frac{m2^{n/2}}{\sqrt{n}}.$$

Чтобы получить утверждение теоремы 2, следует оценить $\varphi(r)$ через $T(K)$ (лемма 8). Тогда из ограничений на $T(K)$ получаются ограничения на φ , и можно получить нужные оценки, минимизируя $\max\left(\frac{m^2 2^n}{\varphi(r_0)n}, \varphi(r_0)\right)$ с полученными ограничениями (леммы 9 и 18).

В разделе доказательств многие леммы ориентированны на частичные операторы, однако некоторые верны лишь для всюду определенных.

4.2. Метод расслоения

Пусть M — подсхема схемы K . Входы и выходы подсхемы M , не являющиеся входами и выходами схемы K , назовем *граничными контактами* подсхемы M относительно схемы K . Множество граничных контактов будем обозначать $(M|K)$.

За $In(M|K)$ обозначим множество входов K_0 , которые лежат на разрезе $(M|K)$ (такие входы будем называть *граничными*), то есть

$$In(M|K) = In(M) \cap (M|K) = In(M) \setminus In(K).$$

За $Out(MK)$ обозначим множество выходов K_0 , которые являются выходами K , то есть

$$Out(MK) = Out(M) \cap Out(K) = Out(M) \setminus (M|K).$$

Если M — подсхема K , то за $U_{in}(M|K)$ обозначим средний потенциал на граничных входах подсхемы M , то есть

$$U_{in}(M|K) = \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in In(M|K)} g_{\alpha}(x).$$

Расслоением схемы K назовем произвольное множество $(M_i)_{i=1}^t$ ее подсхем такое, что $In(M_i|K) \cap In(M_j|K) = \emptyset$, если $i \neq j$.

Нижнюю оценку будем доказывать следующим способом. Пусть есть класс B операторов, причем для каждого оператора f из B и любой схемы K , реализующей оператор f есть нижние оценки для потенциала на границе любой подсхемы, удовлетворяющей определенным ограничениям. Тогда будем строить расслоение $(M_i)_{i=1}^t$ такое, что подсхемы M_i удовлетворяют этому ограничению, и для каждого M_i , $i = 1, \dots, t$ использовать оценку потенциала на границе $(M_i|K)$, а потом суммировать, чтобы получить оценку для всей схемы K , то есть $U(K) \geq \sum_{i=1}^t U_{in}(M_i|K)$.

4.3. Общие оценки для частичных операторов

В доказательстве всюду далее будем полагать, что $D \subseteq \{0, 1\}^n$. Пусть $d = |D|$, $h \geq 1$. Обозначим за $P_u(D, h)$ множество таких операторов $G : D \rightarrow \{0, 1\}^h$, что

$$\frac{1}{d} \sum_{x \in D} |G(x)| \leq u. \tag{2}$$

Лемма 1. Если $u \leq h$, то $\log_2 |P_u(D, h)| \leq du \log_2 \frac{eh}{u}$.

Доказательство. Каждый оператор $G : D \rightarrow \{0, 1\}^h$ задается таблицей своих значений размера $d \times h$. Величина $\sum_{x \in D} |G(x)|$ — сумма по строкам таблицы числа единиц в каждой строке, то есть количество единиц во всей таблице. Условие (2) означает, что количество единиц во всей таблице не больше, чем ud . Оценим количество таблиц, удовлетворяющих этому условию. Рассмотрим 2 случая.

I. $u \leq \frac{h}{2}$. Тогда воспользуемся энтропийным неравенством¹

$$|P_u(D, h)| = \sum_{j=0}^{ud} C_{hd}^j \leq 2^{hdH(\frac{ud}{hd})} = 2^{hdH(\frac{u}{h})}. \quad (3)$$

Используя неравенство $\log_2(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \leq \frac{x}{\ln 2}$, получим

$$\begin{aligned} -(1-x) \log_2 x &= (1-x) \log_2 \frac{1}{1-x} \leq \\ &\leq (1-x) \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{x}{\ln 2} = x \log_2 e. \end{aligned}$$

Отсюда $H(x) \leq x(\log_2 e - \log_2 x) = x \log_2 \frac{e}{x}$. Оценим величину $hH(\frac{u}{h})$:

$$hH\left(\frac{u}{h}\right) \leq h \frac{u}{h} \log_2 \frac{eh}{u} = u \log_2 \frac{eh}{u}.$$

Подставляя полученное выражение в (3) и беря логарифм, получаем утверждение леммы.

II. $\frac{h}{2} < u \leq h$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(u \log_2 \frac{eh}{u} \right)'_u &= (u(\log_2 eh - \ln u \log_2 e))'_u = \\ &= \log_2 \frac{eh}{u} - \log_2 e = \log_2 \frac{h}{u} \geq 0 \text{ при } u \leq h. \end{aligned}$$

¹Если $k < \frac{n}{2}$, то $\sum_{j=0}^k C_n^j \leq 2^{nH(\frac{k}{n})}$, где $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$ — функция энтропии, определенная в интервале $(0, 1)$. Доказательство этого факта есть, например, в [3]

Таким образом $u \log_2 \frac{eh}{u}$ возрастает при $u \leq h$, а значит при $\frac{h}{2} < u \leq h$ выполнено

$$u \log_2 \frac{eh}{u} \geq \frac{h}{2} \log_2 \frac{eh}{h/2} = \frac{h}{2} \log_2 2e > h.$$

Поскольку всего 2^{hd} операторов $G : D \rightarrow \{0, 1\}^h$, то $|P_u(D, h)| \leq 2^{hd}$, значит

$$\log_2 |P_u(D, h)| \leq hd < du \log_2 \frac{eh}{u},$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Количество клеточных элементов равно 3329.*

Доказательство. У элемента может быть от 0 до 3-х входов. Рассмотрим каждый из этих случаев.

- 0) В этом случае каждая из 4-х сторон либо изолятор, либо реализует константу (то есть 3 варианта для каждой стороны). Всего $3^4 = 81$ элемент.
- 1) Есть 4 расположения входа. Каждая из оставшихся сторон либо изолятор, либо реализует функцию от одной переменной (всего 5 вариантов для каждой стороны), причем все 3 оставшихся стороны не могут одновременно быть изоляторами. Поэтому таких элементов $4(5^3 - 1) = 496$.
- 2) Есть $C_4^2 = 6$ расположений 2-х входов. Каждая из оставшихся сторон либо изолятор, либо реализует функцию от двух переменных (всего 17 вариантов для каждой стороны), причем обе оставшихся стороны не могут одновременно быть изоляторами. Поэтому таких элементов $6(17^2 - 1) = 1728$.
- 3) В этом случае есть единственный выход, который не может быть изолятором. Есть 4 расположения выхода. Причем на нем реализуется любая из $2^{2^3} = 256$ функций от 3-х переменных. Поэтому таких элементов $4 \cdot 256 = 1024$.

Суммируя, получаем 3329 клеточных элементов. Лемма доказана.

Оценим число схем заданной площади. Нам достаточно грубой оценки сверху, с которой легко будет оперировать.

Лемма 3. *Количество схем площадью s не больше, чем 2^{15s} .*

Доказательство. Сначала рассмотрим схемы со связным носителем. Имеется не более 4.65^s связных областей с площадью s (полимино) [4]. Для каждой связной области M площади s в каждую клетку можно поставить один из 3329 клеточных элементов. Поэтому область M можно заполнить клеточными элементами 3329^s способами. Таким образом, существует не более $(4.65 \cdot 3329)^s < 2^{14s}$ схем площадью s со связным носителем.

Теперь рассмотрим случай, когда носитель несвязен. Если он разбивается на части с площадями s_1, \dots, s_k , $s_1 + \dots + s_k = s$, то количество таких схем не больше, чем $2^{14s_1} 2^{14s_2} \dots 2^{14s_k} = 2^{14s}$.

Оценим сверху количество всевозможных разбиений множества из s элементов. Разбиение множества (v_1, \dots, v_s) можно закодировать при помощи последовательности длины $s - 1$ из нулей и единиц. Единица на j -м месте обозначает, что v_j и v_{j+1} относятся к разным элементам разбиения, 0 — что к одному и тому же, причем разным разбиениям будут соответствовать разные последовательности. Поэтому количество разбиений не больше, чем 2^{s-1} .

Для каждого разбиения имеется не более 2^{14s} схем, поэтому всего схем меньше, чем $2^{14s} 2^{s-1} < 2^{15s}$. Лемма доказана.

Пусть у нас есть алгоритм определения *последнего слоя* схемы относительно некоторых ее выходов, который зависит только от геометрии схемы.

Введем множество $L(u, s, h, D, m)$ операторов $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ вида $f = F(x, G(x))$, где существует такая схема K , что выполнены условия:

- 1) K имеет m выходов, h входов на последнем слое и не более n входов, не лежащих на последнем слое;
- 2) площадь K не превосходит s ;
- 3) K реализует оператор $F : D \times \{0, 1\}^h \rightarrow \{0, 1\}^m$, причем последние h аргументов подаются на входы K , расположенные на последнем слое;
- 4) $G \in P_u(D, h)$.

Лемма 4. Если $d = |D|$, $h \geq 1$ и $s \leq \frac{1}{25}md$, то

$$|L(u, s, h, D, m)| < m!n!2^{m(1-\varepsilon)d}$$

при $u \leq \frac{m}{3 \log_2 d}$, где $\varepsilon = \frac{1}{15} - \frac{1}{25 \ln 2} \approx 0.009$.

Доказательство. Заметим, что поскольку у каждого элемента схемы может быть не более 3-х входов, то если $h > 3s$, то схем площади s с h входами нет, и утверждение верно. Поэтому далее полагаем, что $h \leq 3s < \frac{3}{25}md$.

Оценим число $|L(u, s, h, D, m)|$. По лемме 1 количество различных операторов G из $P_u(D, h)$ не больше, чем $2^{du \log_2 \frac{eh}{u}}$. Количество операторов F с точностью до перестановок выходов не больше, чем количество схем площади s , то есть 2^{15s} . Для каждой схемы можно осуществить произвольную перестановку выходов, а также входов, на которые подается x . С учетом перестановок выходов и входов, на которые подается x , получается не более $m!n!2^{15s}$ операторов.

Таким образом,

$$|L(u, s, h, D, m)| \leq m!n!2^{15s}2^{du \log_2 \frac{eh}{u}} = m!n!2^{15s+du \log_2 \frac{eh}{u}}. \quad (4)$$

Как уже отмечалось в доказательстве леммы 1, величина $u \log_2 \frac{eh}{u}$ возрастает по u при $u \leq h$. Значит, возрастает и все выражение в правой части. Найдем некоторое u , при котором

$$2^{15s+du \log_2 \frac{eh}{u}} \leq 2^{m(1-\varepsilon)d} \quad \left(\Leftrightarrow 15s + du \log_2 \frac{eh}{u} \leq m(1-\varepsilon)d \right). \quad (5)$$

Обозначим его u_0 . В силу возрастания левой части для всех $u < u_0$ неравенство также будет выполнено. Найдем минимум выражения $ax + \log_2 x$.

$$(ax - \log_2 x)' = a - \frac{1}{x \ln 2}, \quad (ax - \log_2 x)'' = \frac{1}{x^2 \ln 2} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{a \ln 2} - \text{минимум.}$$

$$ax - \log_2 x \geq a \frac{1}{a \ln 2} - \log_2 \frac{1}{a \ln 2} = \log_2(ae \ln 2) = 0$$

при $a = \frac{1}{e \ln 2} \Rightarrow \log_2 x \leq \frac{x}{e \ln 2}$.

Теперь оценим левую часть (5) при $u \leq \frac{m}{3 \log_2 d}$, учитывая, что $s \leq \frac{1}{30}md$, $h \leq \frac{3}{25}md$:

$$\begin{aligned} 15s + du \log_2 \frac{eh}{u} &\leq \frac{3}{5}md + d \frac{m}{3 \log_2 d} \log_2 \frac{3emd \log_2 d}{25m} \leq \\ &\leq md \left(\frac{3}{5} + \frac{\log_2(\frac{3e}{25} \log_2 d) + \log_2 d}{3 \log_2 d} \right) \leq md \left(\frac{3}{5} + \frac{\frac{3e}{25} \log_2 d}{3e \ln 2 \log_2 d} + \frac{1}{3} \right) \leq \\ &\leq md \left(\frac{14}{15} + \frac{1}{25 \ln 2} \right) = md(1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Итак, для всех $u \leq \frac{m}{3 \log_2 d}$ выполнено (5), и домножая на $m!n!$ и подставляя в (4), получаем утверждение леммы.

Пусть $D \subset \{0, 1\}^n$, $d := |D|$. Рассмотрим множество $L_0(D, m)$ операторов $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$, реализуемых некоторой схемой K так, что существует ее подсхема K_0 , содержащая хотя бы один выход схемы K такая, что

$$S(K_0) \leq \frac{1}{25}|Out(K_0K)|d, \quad U_{in}(K_0|K) \leq \frac{|Out(K_0K)|}{3 \log_2 d}. \quad (6)$$

Лемма 5. Пусть $\log_2 m \leq \frac{\varepsilon}{6}d$, где значение ε взято из условия леммы 4. Тогда $|L_0(D, m)| = o(2^{md})$ при $d \rightarrow \infty$, $n \log_2 n = o(d)$.

Доказательство. Обозначим $U(s, m_0) := \frac{m_0}{3 \log_2 d}$.

Рассмотрим классы $l(s, h, D, m_0) \subset L_0(D, m)$, для которых выполнено (6), причем $S(K_0) = s$, $|In(K_0|K)| = h$, $|Out(K_0K)| = m_0$ при фиксированных $1 \leq m_0 \leq m$, $0 \leq s \leq \frac{1}{25}m_0d$ и $h \geq 0$. Посчитаем число элементов в $l(s, h, D, m_0)$. Как уже отмечалось в предыдущей лемме, имеет смысл рассматривать лишь $h \leq 3s < \frac{3}{25}m_0d$ (иначе $l(s, h, D, m_0) = \emptyset$).

Пусть $f \in l(s, h, D, m_0)$. Тогда существует схема K и ее подсхема K_0 такая, что выполнено (6), причем $S(K_0) = s$, $|In(K_0|K)| = h$ и $|Out(K_0K)| = m_0$. Рассмотрим схему K_0 и удалим из нее все граничные выходы (то есть лежащие в $Out(K_0) \setminus Out(K)$). В работе [2] показано, что операция удаления выходов не приводит к увеличению мощности и площади. На место удаленных элементов поместим изолирующие элементы так, чтобы площадь осталась равной s . Полученную схему обозначим K' . Выходы K' совпадают с m_0 выходами

K , а входы — множество $I_0 := In(K_0|K)$ и входы K , попавшие в K' . Пусть на множестве узлов I_0 схемы K реализуется оператор G , а схема K' реализует оператор $F(x, y)$, где y подается на входы из I_0 , а x на те же входы, что и в схеме K . Тогда $f_0 = F(x, G(x))$, где f_0 — оператор с m_0 выходами, значения на которых совпадают со значениями на выходах f , попавшими в K_0 . Обозначим $u_0 := U_{in}(K_0|K)$. По условию

$$U(s, m_0) \geq u_0 \geq \frac{1}{d} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in I_0} g_\alpha(x) = \frac{1}{d} \sum_{x \in D} |G(x)|.$$

Поэтому $G(x) \in P_{u_0}(D, h)$, причем $u_0 \leq U(s, m_0)$. Отсюда следует, что

$$f_0 \in L(U(s, m_0), s, h, D, m_0).$$

Таким образом, каждому оператору $f \in l(s, h, D, m_0)$ сопоставили оператор $f_0 \in L(U(s, m_0), s, h, D, m_0)$. Оценим сверху количество операторов f , которым соответствует один и тот же f_0 . f_0 можно доопределить до f , выбрав m_0 выходов f ($< m_0^m$ способов) и доопределив произвольным образом остальные $m - m_0$ компонент оператора f ($2^{(m-m_0)d}$ способов).

Отсюда, используя лемму 4, получаем оценку

$$\begin{aligned} |l(s, h, D, m_0)| &\leq m^{m_0} 2^{(m-m_0)d} |L(U(s, m_0), s, h, D, m_0)| \leq \\ &\leq m^{m_0} m_0! n! 2^{(m-m_0)d + m_0(1-\varepsilon)d} \leq 2^{md - \varepsilon m_0 d + 2m_0 \log_2 m + n \log_2 n} = \\ &= \frac{2^{md}}{2^{m_0 d (\varepsilon - 2 \frac{\log_2 m + n \log_2 n}{d})}} \leq \frac{2^{md}}{2^{d(\varepsilon - 2 \frac{\log_2 m + n \log_2 n}{d})}}. \end{aligned}$$

Оценим количество элементов в $L_0(D, m)$.

$$\begin{aligned} L_0(D, m) &= \bigsqcup_{m_0=1}^m \bigsqcup_{s=0}^{\frac{1}{25} m_0 d} \bigsqcup_{h=0}^{\frac{3}{25} m_0 d} l(s, h, D, m_0) \Rightarrow |L_0(D, m)| \leq \\ &\leq \sum_{m_0=1}^m \frac{3}{625} m_0^2 d^2 \frac{2^{md}}{2^{d(\varepsilon - \frac{2 \log_2 m + n \log_2 n}{d})}} < m^3 d^2 \frac{2^{md}}{2^{d(\varepsilon - \frac{2 \log_2 m + n \log_2 n}{d})}}. \end{aligned}$$

Значит доля операторов из L_0 равна

$$\frac{|L_0(D, m)|}{2^{md}} \leq \frac{m^3 d^2}{2^{d(\varepsilon - \frac{2 \log_2 m + n \log_2 n}{d})}} \leq \frac{1}{2^{d(\varepsilon - \frac{5 \log_2 m + 2 \log_2 d + n \log_2 n}{d})}}.$$

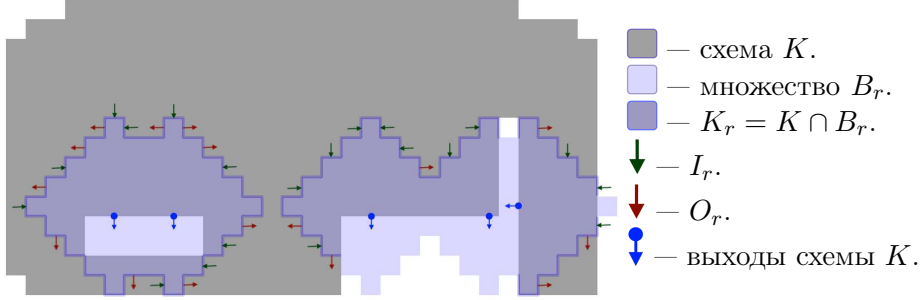


Рис. 2. множества K_r , B_r , I_r , O_r при $r = 5$. Здесь $k_r = 2$, так как область B_r состоит из двух частей, но K_r при этом имеет 4 компоненты связности.

Оценим выражение в показателе. $\log_2 m \leq \frac{\varepsilon d}{6}$, $\log_2 d + n \log_2 n = o(d)$ при $d \rightarrow \infty$, $n \log_2 n = o(d)$, поэтому

$$\begin{aligned}
 d \left(\varepsilon - \frac{5 \log_2 m + 2 \log_2 d + n \log_2 n}{d} \right) &\geq \\
 &\geq d \left(\frac{\varepsilon}{6} + o(1) \right) \rightarrow \infty \text{ при } d \rightarrow \infty, n \log_2 n = o(d).
 \end{aligned}$$

Поэтому $\frac{|L_0(D; m)|}{2^{md}} \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$, $n \log_2 n = o(d)$. Лемма доказана.

Самое простое доказательство имеет теорема 3. Здесь достаточно рассмотреть класс $P_2(D, m) \setminus L_0(D, m)$ и достаточно простое расслоение. Далее потребуются несколько обозначений. Рассмотрим схему K с n входами и m выходами. Пусть $r > 0$; введем несколько обозначений.

- B_r — множество клеток на плоскости, отстоящих от выходных элементов (тех, выходы которых являются выходами схемы) не более чем на $r - 1$ по манхеттенской метрике.
- K_r — множество элементов схемы K , лежащие в множестве B_r .
- I_r — множество входов схемы K_r , лежащие на границе B_r при $r \geq 1$.
- I_0 — множество выходов схемы K (0 -й слой схемы K).
- O_r — множество выходов схемы K_r , лежащих на границе B_r при $r \geq 1$; $O_0 := \emptyset$.

- r -м слоем схемы K будем называть множество $I_r \cup O_r$, то есть множество контактов схемы K_r , лежащих на границе B_r .
- $h_r = |I_r|$ — количество входов схемы K_r , в r -м слое схемы K .
- $R = \max \{r : h_r > 0\}$ — число слоев в схеме K .
- Последний слой схемы K — слой I_R .
- $s_r = |K_r|$ — площадь схемы K_r ; $s_0 := 0$.
- k_r — количество компонент связности множества B_r при $r \geq 1$; $k_0 := m$.
- $\varphi(r) := \sum_{j=0}^r k_j$ — вспомогательная функция, через которую выражаются оценки для s_r , h_r и $U(K)$.
- $u_r^i := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in I_r} g_\alpha(x)$ — средний входной потенциал на r -м слое схемы K .
- $u_r^o := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in O_r} g_\alpha(x)$ — средний выходной потенциал на r -м слое схемы K .
- $u_r := u_r^i + u_r^o$ — средний потенциал на r -м слое схемы K .

Клеткой будем называть единичный квадрат с вершинами в точках с целочисленными координатами и сторонами, параллельными осям координат.

Целочисленным множеством будем называть множество, которое является объединением конечного числа клеток.

Если R — целочисленное множество на плоскости, то за R^+ будем обозначать множество, полученное из R присоединением всех клеток, которые граничат с R . За ∂R будем обозначать границу множества R . Длину границы обозначим $|\partial R|$.

Если R — целочисленное множество, K — плоская схема, то $R \cap K$ будет обозначать подсхему схемы K , составленную из элементов, попавших в множество R .

Лемма 6. *Если R — связное множество клеток на плоскости, причем $|\partial R| = w$, то*

- 1) $|\partial R^+| \leq w + 8$;
- 2) площадь $R^+ \setminus R$ не больше, чем w .

Доказательство.

Узлы целочисленной решетки (углы клеток) на границе R назовем вершинами множества R , стороны клеток на границе R назовем сторонами R . Поскольку множество R связно, то стороны R образуют замкнутую ломаную. Зафиксируем некоторый обход этой ломаной так, чтобы область R оставалась справа. Будем по очереди просматривать стороны R и для каждой стороны добавлять к R клетку, лежащую слева от данной стороны. Когда мы обойдем всю границу R , то получим R^+ . На каждом шаге мы будем рассматривать две стороны — предыдущую и текущую. Имеют место 3 случая.

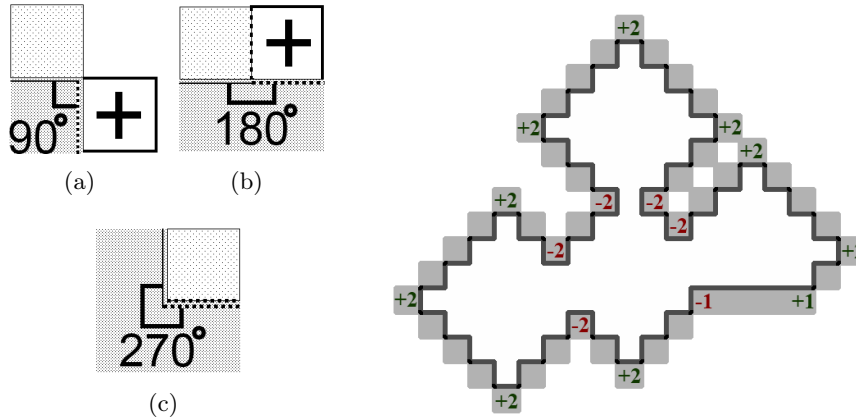


Рис. 3. пунктиром отмечены удаляемые стороны, жирной линией — новые стороны, «+» — новые клетки.

- 1) Стороны образуют угол 90° (Рисунок 3а). Тогда стороны клетки, добавленной на предыдущем шаге сохраняются и добавляется клетка, примыкающая к текущей стороне. Текущая сторона удаляется и добавляется 3 стороны новой клетки. Таким образом, количество сторон увеличилось на 2.
- 2) Стороны образуют угол 180° (Рисунок 3б). Тогда одна сторона клетки, добавленной на предыдущем шаге, окажется внутри области, и ее следует удалить. Также удаляется текущая сторона и добавляется 2 новых стороны новой клетки. Таким образом, число сторон остается прежним.

- 3) Стороны образуют угол 270° (Рисунок 3с). Тогда клетка, которая должна добавиться на текущем шаге совпадает с клеткой, добавленной на предыдущем шаге. Причем одна сторона этой клетки, добавленная на предыдущем шаге, совпадает с текущей стороной, поэтому обе стороны удаляются. Таким образом, количество сторон уменьшается на 2.

Обход следует начать с той вершины, где реализуется первый случай, так как в этом случае нет совпадений сторон с предыдущей клеткой.

Число новых клеток и сторон может уменьшиться за счет совпадения или поглощения некоторых из них, поскольку мы рассмотрели лишь локальные совпадения и поглощения. Пусть первый случай реализовался n раз, второй — m раз, третий — k раз. Тогда $n+m+k = w$, а $n - k = 4 - 4s$, где s — число дыр в области R (поскольку сумма дополнительных углов многоугольника равна 360°). Для дыр все дополнительные углы берутся с обратным знаком, поэтому количество дыр вычитается. Отсюда $4 - 4s + 2k + m = w$,

Разность длин границ R^+ и R не больше, чем $2n - 2k = 8(1-s) \leq 8$. Каждая новая клетка примыкает к стороне R , поэтому количество новых клеток не больше, чем w . Лемма доказана.

Лемма 7. Для любой схемы K и любого $r \leq R$ выполнено

$$s_r \leq 8r\varphi(r-1), \quad h_r \leq 8\varphi(r-1).$$

Доказательство. Пусть d_r — количество сторон клеток на границе множества B_r при $r \geq 1$. Поскольку каждый вход на r -м слое лежит на границе B_r , то ему соответствует некоторая сторона клетки на границе B_r , поэтому $d_r \geq h_r$. Поэтому достаточно доказать, что $d_r \leq 8\varphi(r-1)$. Будем доказывать индукцией по r .

I. База индукции ($r = 1$). Множество состоит не более чем из m клеток, у каждой клетки 4 стороны, поэтому

$$d_1 \leq 4m = 4k_0 = 4\varphi(0) < 8\varphi(0); \quad s_1 \leq m = \varphi(0) < 4\varphi(0).$$

II. Шаг индукции. Пусть $r \geq 2$ и $d_r \leq 8\varphi(r-1)$ и $s_r \leq 4r\varphi(r-1)$. По лемме 6 для каждой компоненты связности ее граница увеличится не больше, чем на 8, а площадь не больше, чем на (половину длины

границы +2). Учитывая, что у нас k_r компонент связности, то $d_{r+1} \leq d_r + 8k_r \leq 8(\varphi(r-1) + k_r) = 8\varphi(r)$ и

$$s_{r+1} \leq s_r + d_r \leq 8r\varphi(r-1) + 8\varphi(r-1) < 8(r+1)\varphi(r).$$

Лемма 8. Для любой схемы K с более, чем одним выходом, выполнено

$$\begin{aligned} \varphi(r'-1) &= T(K), \text{ где } r' = \min\{r : k_r = 1\}, \\ \varphi(r) &\leq T(K) + r \text{ при } r \geq 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть r_1, \dots, r_{m-1} — длины ребер дерева выходов схемы K в порядке возрастания, $r_0 := 0$. Тогда $k_r = m - i$ при $r_i \leq 2r < r_{i+1}$, значит $2(r'-1) < r_{m-1} \leq 2r'$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \varphi(r'-1) &= \sum_{r=0}^{r'-1} k_r = \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{r=\lceil \frac{r_i}{2} \rceil}^{\lceil \frac{r_{i+1}}{2} \rceil - 1} k_r = \sum_{i=0}^{m-2} (m-i)(\lceil r_{i+1}/2 \rceil - \lceil r_i/2 \rceil) = \\ &= 2 \lceil \frac{r_{m-1}}{2} \rceil - 2 \lceil \frac{r_{m-2}}{2} \rceil + 3 \lceil \frac{r_{m-2}}{2} \rceil - \dots - (m-1) \lceil \frac{r_1}{2} \rceil + m \lceil \frac{r_1}{2} \rceil - m \lceil \frac{r_0}{2} \rceil = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \lceil \frac{r_i}{2} \rceil + \lceil \frac{r_{m-1}}{2} \rceil = \sum_{i=1}^{m-2} \lceil \frac{r_i}{2} \rceil + 2 \lceil \frac{r_{m-1}}{2} \rceil = T(K). \end{aligned}$$

Значит если $r \geq r'$, то

$$\varphi(r) = \varphi(r'-1) + \sum_{j=r'}^r k_j = \varphi(r'-1) + (r - r' + 1) \leq T(K) + r.$$

При $r < r'$ неравенство также верно, а именно $\varphi(r) \leq \varphi(r'-1) - 1 \leq T(K) \leq T(K) + r$.

Лемма 9. Если $m \geq 2$, $f \in P_2(D, m) \setminus L_0(D, m)$, $d = |D|$, то

$$U_{T[0,h]}(f) \geq \frac{m^2 d}{60(10h(m, d) + \sqrt{md}) \log_2 d}.$$

Доказательство. Пусть $d := |D|$. Возьмем произвольную схему $K \in T[l, h]$, реализующую оператор f и ее расслоение $\{K_r\}_{r=1}^{r_0}$, где

$r_0 := \max \{r : r\varphi(r-1) \leq \frac{md}{200}\}$. Тогда $(r_0 + 1)\varphi(r_0) \geq \frac{md}{200}$, значит $r_0 \geq \frac{md}{200\varphi(r_0)}$. По лемме 8 и определению $T[l, h]$ получаем

$$r_0 \geq \frac{md}{200\varphi(r_0)} \geq \frac{md}{200(T(K) + r)} \geq \frac{md}{200(h(m, d) + r_0)}. \quad (7)$$

Поскольку $r_0^2 \leq r_0\varphi(r_0-1) \leq \frac{md}{200}$, то $r_0 < \frac{\sqrt{md}}{10}$, поэтому из (7) получим

$$r_0 \geq \frac{md}{200\left(h(m, d) + \frac{\sqrt{md}}{10}\right)} = \frac{md}{20(10h(m, d) + \sqrt{md})}.$$

По лемме 7 для всех $r \leq r_0$ получаем $s_r \leq 8r\varphi(r-1) \leq \frac{md}{25}$. Тогда поскольку $f \notin L_0(D, m)$, то для любого $r \leq r_0$ выполнено $u_r \geq \frac{m}{3\log_2 d}$, значит

$$\begin{aligned} U(K) &\geq \sum_{r=0}^{r_0} u_r \geq \sum_{r=0}^{r_0} \frac{m}{3\log_2 d} = \\ &= \frac{m(r_0 + 1)}{3\log_2 d} > \frac{m^2 d}{60(10h(m, d) + \sqrt{md})\log_2 d}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассматривая отдельно случаи $h(m, d) < \sqrt{md}$ и $h \geq \sqrt{md}$, получим утверждение теоремы 3, с константой $C = \frac{1}{660}$.

Доказательство теоремы 1 для частичных операторов значительно сложнее, и распадается на 2 случая: $\log_2 m \leq \sqrt{|D|}$ и $m \geq n$. Таким образом, при $n = o(\sqrt{|D|})$ все значения m будут охвачены. Начнем с первого случая.

Пусть, как и в лемме 4, у нас есть алгоритм определения *последнего слоя* схемы относительно некоторых ее выходов, который зависит только от геометрии схемы.

Рассмотрим множество $L_1(D, m)$ операторов $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$, реализуемых некоторой схемой K так, что существует ее подсхема K_0 , такая, что все входы $In(K_0|K)$ лежат на последнем слое схемы K_0 относительно выходов $Out(K_0K)$ и

$$S(K_0) \leq \frac{1}{32}|Out(K_0K)|d, \quad U_{in}(K_0|K) \leq \frac{1}{9}. \quad (8)$$

Лемма 10. Если $d = |D|$, $\log_2 m \leq \frac{d}{50}$, $d \rightarrow \infty$, $n \log_2 n = o(d)$, то $|L_1(D, m)| = o(2^{md})$.

Доказательство. Оценка числа функций в $L_1(D, m)$ очень похожа на оценку, получаемую в [2, лемма 14]. Возьмем любой оператор $f \in L_1(D, m)$. Тогда существует реализующая его схема K и ее подсхема K_0 , для которой выполнено (8). Из схемы K_0 удалим выходы $Out(K_0) \cap (K_0|K)$, и полученную схему обозначим K' .

Обозначим $I_0 := In(K_0|K)$ — граничные входы схемы K_0 , $m_0 := |Out(K_0K)|$, f_0 — оператор, выходы которого являются теми выходами f , которые реализуются на выходах $Out(K_0K)$.

Пусть на множестве контактов I_0 схемы K реализуется оператор G . Тогда $f(x) = F(x, G(x))$, где F — оператор, который реализует схема K' .

$$\frac{1}{d} \sum_{x \in D} |G(x)| \leq U_{in}(K_0|K) \leq \frac{1}{9}.$$

Отсюда получаем, что если $D_1 = \{x \in D : f_0(x) \neq F(x, \bar{0})\}$, то $F(x, G(x)) = f_0(x) \neq F(x, \bar{0})$ при $x \in D_1$, поэтому $G(x) \neq \bar{0}$ при $x \in D_1$, значит $|D_1| \leq \frac{d}{9}$. Подадим на все входы I_0 схемы K' нули и применим операцию удаления констант. В результате получится некоторая схема K'' , реализующая оператор $F'(x) = F(x, \bar{0})$, имеющая ту же геометрию, что и схема K_0 , поскольку удаление входов, выходов и констант не меняет геометрию схемы. Таким образом, $F'(x) = f(x)$, когда $G(x) = 0$, то есть, когда $x \in D \setminus D_1$. Заметим, что $S(K'') \leq S(K') \leq S(K_0) \leq \frac{1}{32} m_0 d$. Таким образом, $S(f_0|_{D \setminus D_1}) = S(F') \leq S(K'') \leq \frac{1}{32} m_0 d$.

То есть каждому оператору из $L_1(D, m)$ соответствует некоторое подмножество из $m_0 \leq m$ выходов (из которых составлен оператор f_0), некоторая область $D_1 : |D_1| \leq \frac{d}{9}$ и схема $K'' : S(K'') \leq \frac{1}{32} m_0 d$, реализующая оператор $F'(x)$ такой, что $f_0(x) = F'(x)$ при $x \in D \setminus D_1$ и $f_0(x) \neq F'(x)$ при $x \in D_1$. Отсюда мы можем оценить количество элементов в $L_1(D, m)$:

- Имеется $\sum_{i=0}^{d/9} C_d^i \leq 2^{H(\frac{1}{9})d}$ способов выбрать область $D_1 \subset D : |D_1| \leq \frac{d}{9}$.
- По лемме 3 имеется не более $2^{15 \frac{1}{32} m_0 d}$ схем площади не более $\frac{1}{32} m_0 d$.

- Каждая из таких схем определяет $n!m_0!$ операторов F' , отличающихся порядком входов и выходов.
- Для фиксированного оператора F' есть $(2^{m_0} - 1)^{|D_1|} \leq (2^{m_0} - 1)^{\frac{d}{9}}$ способов доопределить оператор f_0 на области D_1 :

$$f_0(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in D \setminus D_1, \\ \psi(x) & x \in D_1; \end{cases} \quad \text{причем } \psi(x) \neq F'(x).$$

- Когда фиксирован оператор f_0 , то остается $C_m^{m_0} \leq \frac{m^{m_0}}{m_0!}$ способов выбрать m_0 выходов f , которые равны f_0 . Также остается доопределить оператор f на остальных $m - m_0$ выходах — всего $2^{(m-m_0)d}$ способов.

Итак, получаем оценку для числа схем при фиксированном числе выходов m_0 :

$$\begin{aligned} 2^{H(\frac{1}{9})d} 2^{\frac{15}{32}m_0d} n!m_0!(2^{m_0} - 1)^{d/9} \frac{m^{m_0}}{m_0!} 2^{(m-m_0)d} &= \\ &= n!m^{m_0} 2^{d(m - \frac{17}{32}m_0 + H(\frac{1}{9}))} (2^{m_0} - 1)^{d/9}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $m_0 = 1$:

$$\begin{aligned} n!m 2^{d(m - \frac{17}{32} + H(\frac{1}{9}))} (2^1 - 1)^{d/9} &= \\ &= \frac{2^{md}}{2^{d(\frac{17}{32} - H(\frac{1}{9}) - \frac{n \log_2 n + \log_2 m}{d})}} < \frac{2^{md}}{2^{d(0.027 - \frac{n \log_2 n + \log_2 m}{d})}} = o(2^{md}) \end{aligned}$$

при $d \rightarrow \infty$, $n \log_2 n = o(d)$, $\log_2 m \leq d/50$. Оценим теперь количество операторов в случае $m_0 \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{m_0=2}^m n!m^{m_0} 2^{d(m - \frac{17}{32}m_0 + H(\frac{1}{9}))} (2^{m_0} - 1)^{d/9} &< \\ &< n! \sum_{m_0=2}^m m^{m_0} 2^{d(m - \frac{17}{32}m_0 + \frac{1}{9}m_0 + H(\frac{1}{9}))} < \\ &< \sum_{m_0=2}^m \frac{2^{dm}}{2^{d(\frac{13}{32}m_0 - H(\frac{1}{9}) - \frac{m_0 \log_2 m + n \log_2 n}{d})}} < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{m_0=2}^m \frac{2^{dm}}{2^{d\left(\left(\frac{3}{8}m_0 - H\left(\frac{1}{9}\right)\right) + m_0\left(\frac{1}{32} - \frac{\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)\right)}} \leq \\
&\leq \sum_{m_0=2}^m \frac{2^{md}}{2^{d\left(\frac{3}{4} - H\left(\frac{1}{9}\right)\right)}} < \frac{2^{md}(m-1)}{2^{0.2d}} < \frac{2^{md}}{2^{0.2d - \log_2 m}} = o(2^{md})
\end{aligned}$$

при $d \rightarrow \infty$, $n \log_2 n = o(d)$, $\log_2 m \leq \frac{d}{50}$.

Лемма 11. Если R — целочисленное множество на плоскости, то $|\partial R| \geq 4\sqrt{S(R)}$.

Доказательство. Пусть R_x, R_y — проекции множества R на горизонтальную и вертикальную оси соответственно. Тогда каждый единичный отрезок R_x будет проекцией как минимум двух отрезков границы множества R , причем каждый отрезок границы параллелен своей проекции и имеет длину 1. Таким образом, $|\partial R| \geq 2|R_x| + 2|R_y|$. С другой стороны, $R \subset R_x \times R_y$, поэтому

$$S(R) \leq |R_x||R_y| \leq |R_x| \left(\frac{|\partial R|}{2} - |R_x| \right) \leq \left(\frac{|\partial R|}{4} \right)^2 \Rightarrow |\partial R| \geq 4\sqrt{S(R)}.$$

Лемма 12. Если $x, y > 0$, то $x \log_2 x + y \log_2 y + \frac{2xy}{x+y} \leq (x+y) \log_2(x+y)$.

Доказательство. Положим $s := x + y$, тогда $y = s - x$. Найдем максимум левой части.

$$\begin{aligned}
&\left(x \log_2 x + (s-x) \log_2(s-x) + \frac{2x(s-x)}{s} \right)'' = \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} - \frac{4}{s} = \frac{s}{x(s-x)} - \frac{4}{s}.
\end{aligned}$$

Поскольку $x(s-x) \leq \frac{s^2}{4}$, то $\frac{s}{x(s-x)} \geq \frac{4}{s}$, поэтому левая часть выпукла книзу, и максимум внутри интервала $[0; s]$ не достигается. Значит максимум достигается на границе (в силу симметрии значения в разных концах одинаковы). Посчитаем значение при $x = 0$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \log_2 x + (s-x) \log_2(s-x) + \frac{2x(s-x)}{s} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} x \log_2 x + s \log_2 s = s \log_2 s.
\end{aligned}$$

Поскольку это максимум на всем отрезке, то утверждение леммы выполнено.

Теперь мы можем приступить к доказательству нижней оценки для случая $\log_2 m \asymp \sqrt{|D|}$.

Лемма 13. Если $D \subset \{0, 1\}^n$, $\log_2 m \leq \frac{\sqrt{|D|}}{41}$, то

$$U(f) \geq \frac{1}{108} \frac{m\sqrt{|D|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |D|)}}$$

для почти всех операторов $f \in P(D, m)$ при $n \log_2 n = o(|D|)$, $|D| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Зафиксируем некоторые n , $D \geq 2^{18}$, $m \leq \sqrt{D}/41$. Обозначим $d := |D|$, $l := \log_2 d$. Поскольку $|D| \geq 2^{18}$, то $l \geq 18$.

Сначала рассмотрим произвольную схему K , с n входами и n выходами. Будем строить расслоение $\{M_i\}$. Каждое M_i будет определяться, как $K \cap R_i$, где R_i — некоторое множество клеток на плоскости. R_i будем строить так, чтобы для любых $i < j$ либо $R_i \subset R_j$, либо $R_i \cap R_j = \emptyset$. Для каждого i определим множество

$$T_i := \{R_j : j \leq i \wedge (\forall k \leq i)(k \neq j \Rightarrow R_j \not\subset R_k)\},$$

элементами которого являются максимальные относительно включения множества R_j при $j \leq i$.

За $out(R)$ обозначим количество выходов схемы K , попавших в множество R , то есть $out(R) = |Out((R \cap K)K)|$. Видно, что $(R^+ \cap K|K) \cap (R \cap K|K) = \emptyset$, поскольку вся граница R лежит внутри R^+ .

- 1) Строить начнем с $i = i_0$, равного количеству элементов, к которым подключены выходы схемы. Положим $R_j := \{e_j\}$, где e_j — j -й такой элемент, $u_j := \frac{1}{9}$. Тогда $T_{i_0} = \{R_1, \dots, R_{i_0}\}$.
- 2) Пусть построены множества $R_j, j \leq i$, и множество $T_i = R_{j_1}, \dots, R_{j_{t_i}}$. Рассмотрим два случая.
 - а) Есть $R_p, R_q \in T_i$ такие, что $\partial R_p \cap \partial R_q \neq \emptyset$ (будем говорить, что R_p касается R_q). В этом случае полагаем $R_{i+1} := R_p \cup R_q$, $u_{i+1} := u_p + u_q$. Тогда $T_{i+1} = (T_i \setminus \{R_p, R_q\}) \cup \{R_{i+1}\}$. В этом случае будем говорить, что R_i получено операцией объединения множеств R_p и R_q .

- б) $\partial R_p \cap \partial R_q \neq \emptyset$ для всех $R_p, R_q \in T_i$. Положим $R'_i := \arg \min_{R \in T_i} \frac{S(R)}{\text{out}(R)}$. Тогда $R'_i = R_p$ для некоторого $p \leq i$.
- если $\frac{S(R_p^+)}{\text{out}(R_p^+)} > \frac{1}{32}d$, то завершаем построение.
 - иначе полагаем $R_{i+1} := R_p^+$, $u_{i+1} := u_p + \max\left(\frac{1}{9}, \frac{\text{out}(R_{i+1})}{3l}\right)$.
- Тогда $T_{i+1} = (T_i \setminus \{R_p\}) \cup \{R_{i+1}\}$.
 В этом случае будем говорить, что R_i получено операцией расширения из множества R_p .

Заметим, что сами множества R_i зависят лишь от расположения выходов схемы K , но не зависят от параметров d, n, m . Поэтому мы можем по этому алгоритму определить *последний слой* схемы K_0 относительно некоторых выходов следующим образом. Строим множества R_1, R_2, \dots по описанному алгоритму, заменяя критерий остановки 2б, на проверку, что $\partial R_i \not\subset R_K \setminus \partial R_K$, где R_K — область, занимаемая схемой K_0 . Возьмем множество R_t , построенное на последнем шаге; по построению это первое R_i , граница которого не попала вовнутрь K_0 . Последним слоем K_0 назовем входы, лежащие на общей границе $R_t \cap \partial R_K$. Для выбранного определения последнего слоя схемы определены множества $L_0(D, m)$ и $L_1(D, m)$. При таком определении последним слоем подсхемы $M_i = K \cap R_i$ будет как раз $\text{In}(M_i|K)$.

Зафиксируем произвольную функцию $f \in P_2(D, m) \setminus L_1(D, m) \setminus L_2(D, m)$ и оценим ее средний потенциал. Зафиксируем схему K реализующую f и построим для нее последовательность R_1, R_2, \dots, R_t .

Заметим, что если R_i было построено на i -м шаге по пункту 2б, то

$$S(M_i) = S(R_i \cap K) \leq S(R_i) \leq \frac{1}{32}d \text{out}(R_i) = \frac{1}{32}d |\text{Out}(M_i|K)|,$$

поэтому раз $f \notin L_0(D, m) \cup L_1(D, m)$, то $U(M_i|K) \geq \max\left(\frac{1}{9}, \frac{\text{out}(R_i)}{3l}\right)$.
 Обозначим

$$s_i := S(R_i), \quad w_i := |\partial R_i|, \quad m_i := \text{out}(R_i), \quad k_i := \frac{s_i}{m_i}.$$

Покажем по индукции, что

$$1) \quad 72u_i \geq w_i;$$

- 2) $w_i \leq 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_i s_i}$;
- 3) $u_i \geq \frac{1}{18} \sqrt{s_i}$;
- 4) Если $m > l$, то $u_i \geq c \frac{m_i \sqrt{k_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}}$, где $c = \frac{1}{6\sqrt{3}}$, где $\psi(x) = 2^{\frac{3}{2}} x \log_2 x$.
- 5) $|k_p - k_r| \leq 2^{\frac{5}{2}} \min_{q: R_q \in T_i} \sqrt{k_q}$ для любых $p, r : R_p, R_r \in T_i$ при $i \geq i_0$.

I. База индукции. Если R_i построено на первом шаге, то $i \leq i_0$ и

$$w_i = 4, \quad s_i = 1, \quad m_i \leq 4, \quad \frac{1}{4} \leq k_i \leq 1, \quad u_i = \frac{1}{9}.$$

- 1) $72u_i = 8 > 4 = w_i$.
- 2) $w_i = 4 < 2^{\frac{5}{2}} \leq 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_1 s_1}$.
- 3) $u_i = \frac{1}{9} > \frac{1}{18} = \frac{1}{18} \sqrt{s_i}$
- 4) $m_i \sqrt{k_i} = \sqrt{s_i m_i} \leq 2$. Поэтому при $l > 16$ $u_i = \frac{1}{9} > c \frac{2}{\sqrt{l}} > c \frac{m_i \sqrt{k_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}}$
- 5) если $i = i_0$, то $|k_p - k_r| \leq 1 < 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} \leq 2^{\frac{5}{2}} \min_{q: R_q \in T_{i_0}} \sqrt{k_q}$ для любых $p, r \leq i_0$.

IIa. Шаг индукции, когда R_i получено операцией объединения R_p и R_q .

1. $w_i = |\partial(R_p \cup R_q)| \leq |\partial R_p| + |\partial R_q| = w_p + w_q \leq 72u_p + 72u_q = 72u_i$.
2. $s_i = s_p + s_q$, $m_i = m_p + m_q$. Применяя неравенство Коши-Буняковского к векторам $(\sqrt{m_p}, \sqrt{m_q})$ и $(\sqrt{s_p}, \sqrt{s_q})$, получим

$$w_i \leq w_p + w_q \leq 8(\sqrt{m_p s_p} + \sqrt{m_q s_q}) \leq 8\sqrt{m_p + m_q} \sqrt{s_p + s_q} = 8\sqrt{m_i s_i}.$$

3. По лемме 11 имеем $w_i = |\partial R_i| \geq 4\sqrt{S(R_i)} = 4\sqrt{s_i}$. Отсюда по пункту 1 получаем, что $u_i \geq \frac{1}{72} w_i \geq \frac{1}{18} \sqrt{s_{i+1}}$.

4. Покажем, что $u_i \geq c \frac{\sqrt{s_i m_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}}$. По лемме 12 имеем

$$\begin{aligned} \psi(m_i) &= 2^{\frac{3}{2}} m_i \log_2 m_i \geq 2^{\frac{3}{2}} m_p \log_2 m_p + 2^{\frac{3}{2}} m_q \log_2 m_q + 2^{\frac{3}{2}} \frac{2m_p m_q}{m_i} = \\ &= \psi(m_p) + \psi(m_q) + 2^{\frac{5}{2}} \frac{m_p m_q}{m_i}. \\ u_i - c \frac{m_i \sqrt{k_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}} &= u_p + u_q - c \frac{\sqrt{k_i} m_i}{\sqrt{l}} + c \frac{\psi(m_i)}{\sqrt{l}} \geq \\ &\geq c \frac{m_p \sqrt{k_p} + m_q \sqrt{k_q}}{\sqrt{l}} - c \frac{\psi(m_p) + \psi(m_q)}{\sqrt{l}} + \\ &+ c \frac{\psi(m_q) + \psi(m_p) + 2^{\frac{5}{2}} \frac{m_p m_q}{m_i}}{\sqrt{l}} - c \frac{\sqrt{m_i s_i}}{\sqrt{l}} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{l}} \left(\underbrace{m_p \sqrt{k_p} + m_q \sqrt{k_q} - (m_p + m_q) \sqrt{k_i}}_{\text{обозначим за } \beta} + 2^{\frac{5}{2}} \frac{m_p m_q}{m_i} \right). \end{aligned}$$

Обозначим $\check{k} := \min(k_p, k_q)$ и оценим $|k_i - k_p|$:

$$\begin{aligned} |k_i - k_p| &= \left| \frac{s_p + s_q}{m_i} - k_p \right| = \left| \left(\frac{m_p}{m_i} - 1 \right) k_p + \frac{m_q}{m_i} k_q \right| = \\ &= \frac{m_q}{m_i} |k_q - k_p| \leq 2^{\frac{5}{2}} \frac{m_q}{m_i} \sqrt{\check{k}}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли пункт 5 предположения индукции. Отсюда $|\sqrt{k_i} - \sqrt{k_p}| = \frac{|k_i - k_p|}{\sqrt{k_i} + \sqrt{k_p}} \leq 2^{\frac{5}{2}} \frac{m_q}{2m_i \sqrt{\check{k}}} \sqrt{\check{k}} = 2\sqrt{2} \frac{m_q}{m_i}$. Аналогично $|\sqrt{k_i} - \sqrt{k_q}| \leq 2\sqrt{2} \frac{m_p}{m_i}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\beta| &\leq m_p \left| \sqrt{k_p} - \sqrt{k_i} \right| + m_q \left| \sqrt{k_q} - \sqrt{k_i} \right| \leq \\ &\leq 2\sqrt{2} \left(m_p \frac{m_q}{m_i} + m_q \frac{m_p}{m_i} \right) = 4\sqrt{2} \frac{m_p m_q}{m_i}. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что $\beta + 2^{\frac{5}{2}} \frac{m_p m_q}{m_i} \geq 0$. То есть $u_i - c \frac{m_i \sqrt{k_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}} > 0$, что и требовалось.

5. Обозначим $\check{k}_i := \min_{j: R_j \in T_i} k_j$, $\hat{k}_i := \max_{j: R_j \in T_i} k_j$. Мы хотим показать, что

$\hat{k}_i - \check{k}_i \leq \sqrt{\check{k}_i}$. Поскольку $T_i \setminus T_{i-1} = \{R_i\}$, то $\hat{k}_i \leq \max(\hat{k}_{i-1}, k_i)$, $\check{k}_i \geq \min(\check{k}_{i-1}, k_i)$.

$$k_i = \frac{s_i}{m_i} = \frac{s_p + s_q}{m_i} = k_p \frac{m_p}{m_i} + k_q \frac{m_q}{m_i} \in [\check{k}_{i-1}, \hat{k}_{i-1}] \Rightarrow \\ \Rightarrow \check{k}_{i-1} \leq \check{k}_i \leq \hat{k}_i \leq \hat{k}_{i-1}.$$

$$\text{Значит } \hat{k}_i - \check{k}_i \leq \hat{k}_{i-1} - \check{k}_{i-1} \leq \sqrt{\check{k}_{i-1}} \leq \sqrt{\check{k}_i}.$$

Пб. Шаг индукции, когда R_i получено операцией расширения R_p . Здесь $m_i = m_p$ и $s_i = S(R_p^+) \leq s_p + w_p$.

1. Учитывая лемму 6 и связность множества R_p , получим

$$72u_i = 72 \left(u_p + \max \left(\frac{1}{9}, \frac{m_i}{3l} \right) \right) \geq 72 \left(u_p + \frac{1}{9} \right) \geq \\ \leq w_p + 8 = |\partial R_p| + 8 \geq |\partial R_p^+| = w_i.$$

2. Если $w_i < w_p$, то $w_i < 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_p s_p} < 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_i s_i}$. Далее полагаем, что $w_i \geq w_p$. $R_i = R_p^+$, поэтому $|\partial(R_i \setminus R_p)| = |\partial R_i \sqcup \partial R_p| = w_i + w_p$. Поскольку у каждой клетки 4 стороны, то $w_i + w_p \leq 4S(R_i \setminus R_p) = 4(s_i - s_p)$. Отсюда $\Delta s := s_i - s_p \geq \frac{1}{4}(w_i + w_p) \geq \frac{1}{2}w_p$.

Рассмотрим несколько случаев.

а) $m_p = 1$ или $s_p = 1$. Тогда R_p , а значит и R_i , имеет форму круга по манхэттенской метрике. Если r — радиус, то

$$s_i = 2r(r+1) + 1 > \frac{(2r+1)^2}{2}, \quad w_i = 4(2r+1) \leq 4\sqrt{2s_i} = 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_i s_i}.$$

б) $s_p \geq 2$, $m_p \geq 2$, $2m_p \geq s_p$. Заметим, что поскольку R_p связное, то $w_p \leq 2s_p + 2$. Поскольку $s_i \geq s_p + 6 \geq 8$, то

$$w_i \leq w_p + 8 \leq 2s_p + 10 \leq \\ \leq 2 \underbrace{\sqrt{2s_i m_i}}_{\geq 4\sqrt{2}} + 10 \leq 4\sqrt{2s_i m_i} \underbrace{- 8\sqrt{2} + 10}_{< 0} < 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{s_i m_i}.$$

в) $s_p \geq 2$, $m_p \geq 2$, $2m_p < s_p$. Поскольку $(\sqrt{x})''' = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} > 0$, то при $\Delta x \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\sqrt{x + \Delta x} &= \sqrt{x} + \Delta x (\sqrt{x})' + \frac{1}{2} \Delta x^2 (\sqrt{x})'' + \frac{1}{6} \Delta x^3 (\sqrt{x})''' \geq \\
&\geq \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} - \frac{\Delta x^2}{8x\sqrt{x}}, \\
2^{\frac{5}{2}} \sqrt{s_i m_i} - w_p &\geq 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_p} \sqrt{s_p + \frac{w_p}{2}} - w_p \geq \\
&\geq 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_p} \left(\sqrt{s_p} + \frac{w_p}{4\sqrt{s_p}} - \frac{w_p^2}{32s_p\sqrt{s_p}} \right) - w_p = \\
&= 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_p s_p} - w_p \underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{2m_p}}{\sqrt{s_p}} + \frac{w_p \sqrt{2m_p}}{8s_p\sqrt{s_p}} \right)}_{>0} \geq \\
&\geq 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_p s_p} \left(\frac{\sqrt{2m_p}}{\sqrt{s_p}} - \frac{\sqrt{m_p s_p} \sqrt{m_p}}{s_p \sqrt{s_p}} \right) = \\
&= 8m_p \left(1 - \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{2s_p}} \right) \geq 8m_p \left(1 - \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{4m_p}} \right) = 4m_p \geq 8.
\end{aligned}$$

Отсюда $w_i \leq w_p + 8 \leq w_p + (2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_i s_i} - w_p) = 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{m_i s_i}$.

4. Покажем, что $u_i \geq c \frac{m_i \sqrt{k_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}}$. Рассмотрим два случая.

а) $\sqrt{m_i s_i} < 2^{\frac{3}{2}} m_i \log_2 m_i$, тогда $c \frac{\sqrt{m_i s_i} - 2^{\frac{3}{2}} m_i \log_2 m_i}{\sqrt{l}} < 0 \leq u_i$.

б) $m_p \leq 5$. Тогда $m_i \leq 5$ и $u_i \geq \frac{\sqrt{s_i}}{18} \leq c \frac{\sqrt{s_i m_i}}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \geq c \frac{\sqrt{s_i m_i}}{\sqrt{l}} \geq c \frac{\sqrt{s_i m_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}}$ по пункту 3.

в) Содержательный случай, когда $m_p \geq 6$ и $\sqrt{m_i s_i} \geq 2^{\frac{3}{2}} m_i \log_2 m_i$, то есть $s_i \geq 8m_i \log_2^2 m_i = 8m_p \log_2^2 m_p$. Оценим s_p :

$$\begin{aligned}
s_p &\geq s_i - w_p \geq s_i - 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{s_i m_p} \geq 8m_p \log_2^2 m_p - 16\sqrt{m_p^2 \log_2^2 m_p} = \\
&= m_p \log_2^2 m_p \left(8 - \frac{16}{\log_2 m_p} \right) \geq \log_2^2 6 \left(8 - \frac{16}{\log_2 6} \right) m_i > 12m_i \implies \\
&\implies c \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{s_p}} < \frac{c}{\sqrt{12}} = \frac{1}{6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{36}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\sqrt{s_i} \leq \sqrt{s_p + w_p} \leq \sqrt{s_p + 72u_p} \leq \sqrt{s_p} + \frac{36u_p}{\sqrt{s_p}}$, $m_i = m_p$ и обозначив $A := c \frac{\sqrt{m_p s_p} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}}$, получим

$$\begin{aligned} c \frac{\sqrt{m_i s_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}} - u_p &\leq A + c \frac{36\sqrt{m_p} u_p}{\sqrt{l}\sqrt{s_p}} - u_p = \\ &= A - u_p \underbrace{\left(1 - c \frac{36\sqrt{m_p}}{\sqrt{l}\sqrt{s_p}}\right)}_{\geq 0 \text{ (по (9))}} \leq A - A \left(1 - c \frac{36\sqrt{m_p}}{\sqrt{l}\sqrt{s_p}}\right) = \\ &= 36cA \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{l}\sqrt{s_p}} \leq 36c^2 \frac{\sqrt{m_p s_p} \sqrt{m_p}}{\sqrt{l}\sqrt{l}\sqrt{s_p}} = \frac{m_p}{3l}. \\ u_i = u_p + \max\left(\frac{1}{9}, \frac{m_p}{3l}\right) &\geq u_p + \frac{m_p}{3l} \geq c \frac{\sqrt{m_i s_i} - \psi(m_i)}{\sqrt{l}}. \end{aligned}$$

5. Обозначим $\check{k}_i := \min_{j: R_j \in T_i} k_j$, $\hat{k}_i := \max_{j: R_j \in T_i} k_j$.

Мы хотим показать, что $\hat{k}_i - \check{k}_i \leq 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{\check{k}_i}$. По построению, $T_i = (T_{i-1} \setminus \{R_p\}) \cup \{R_i\}$. Поэтому $\check{k}_i \geq \min\left(\check{k}_{i-1}, \frac{S(R_i)}{\text{out}(R_i)}\right) = \min(\check{k}_{i-1}, k_i)$. Но $k_i = \frac{s_i}{m_i} \geq \frac{s_p}{m_i} = \frac{s_p}{m_p} = k_p \geq \check{k}_{i-1}$, поэтому $\check{k}_i \geq \check{k}_{i-1}$.

Аналогично, $\hat{k}_i \leq \max(\hat{k}_{i-1}, k_i)$. Рассмотрим два случая.

- а) Если $k_i \leq \hat{k}_{i-1}$, то $\hat{k}_i \leq \hat{k}_{i-1}$, и $\hat{k}_i - \check{k}_i \leq \hat{k}_{i-1} - \check{k}_{i-1} \leq \sqrt{\check{k}_{i-1}} \leq \sqrt{\check{k}_i}$.
- б) Если $k_i > \hat{k}_{i-1}$, то, учитывая пункт 2, получим

$$\begin{aligned} \hat{k}_i - \check{k}_i &\leq k_i - k_p = \frac{s_i}{m_i} - \frac{s_p}{m_p} = \\ &= \frac{s_i - s_p}{m_p} \leq \frac{w_p}{m_p} \leq \frac{2^{\frac{5}{2}} \sqrt{s_p m_p}}{m_p} = 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{s_p}{m_p}} = 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{\check{k}_{i-1}} \leq 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{\check{k}_i}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что по построению $\check{k}_{i-1} = \min_{r: R_r \in T_{i-1}} \frac{S(R_r)}{\text{out}(R_r)} = \frac{S(R_p)}{\text{out}(R_p)} = k_p$.

Итак, доказаны свойства 1–5 для всех i . Пусть у нас алгоритм завершился на шаге t . Условием завершения алгоритма было условие, что $\frac{S(R_j^+)}{\text{out}(R_j)} > \frac{1}{32}d$ для всех $j: R_j \in T_t$. Поэтому

$$\begin{aligned}
k_j = \frac{s_j}{m_j} = \frac{S(R_j)}{m_j} &\geq \frac{S(R_j^+) - w_j}{\text{out}(R_j^+)} > \frac{1}{32}d - \frac{w_j}{m_j} \geq \\
&\geq \frac{d}{32} - 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{s_j}{m_j}} \geq \frac{d}{32} - 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{d}{32}} = \frac{d}{32} - \sqrt{d}.
\end{aligned}$$

Поскольку $d \geq 2^{18} > 288^2$, то $\frac{d}{32} - \sqrt{d} = d \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{\sqrt{d}} \right) \geq d \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{288} \right) = \frac{d}{36}$. Пусть i_1, i_2, \dots, i_r — номера шагов, на которых применялась операция расширения. При $m \leq l$ из определения u_i , а также пункта 3 получим

$$\begin{aligned}
U(K) &\geq \sum_{q=1}^r U_{\text{in}}(M_{i_r} | K) \geq \sum_{i=1}^t \max \left(\frac{1}{9}, \frac{m_{i_r}}{3l} \right) = \sum_{j: R_j \in T_t} u_j \geq \\
&\geq \sum_{j: R_j \in T_t} \frac{1}{18} \sqrt{k_j m_j} \geq \frac{1}{18} \sqrt{\frac{d}{36}} \sum_{j: R_j \in T_t} \sqrt{m_j} \geq \frac{\sqrt{d}}{108} \sqrt{\sum_{j: R_j \in T_t} m_j} = \frac{\sqrt{md}}{108}.
\end{aligned}$$

Для функции ψ имеем оценку $\sum \psi(m_j) = 2^{\frac{3}{2}} \sum m_j \log_2 m_j \leq 2^{\frac{3}{2}} (\sum m_j) \log_2 \sum m_j = \psi(\sum \psi_j)$. Поэтому при $m > l$, используя пункт 4, получим

$$\begin{aligned}
U(K) &\geq \sum_{j: R_j \in T_t} u_j \geq \sum_{j: R_j \in T_t} \frac{m_j \sqrt{k_j} - \psi(m_j)}{6\sqrt{3l}} \geq \frac{\frac{\sqrt{d}}{6}m - \psi(m)}{6\sqrt{3l}} = \\
&= \frac{m\sqrt{d}}{36\sqrt{3l}} \left(1 - \frac{12\sqrt{2} \log_2 m}{\sqrt{d}} \right) \geq \frac{m\sqrt{d}}{108\sqrt{l}} \text{ при } \log_2 m \leq \frac{\sqrt{d}}{41}.
\end{aligned}$$

Объединяя случаи $m \leq l$ и $m > l$, получаем

$$U(f) = U_D(K) \geq \max \left(\frac{m\sqrt{d}}{108\sqrt{l}}, \frac{1}{108} \sqrt{ml} \right) = \frac{m\sqrt{d}}{108\sqrt{\min(m, l)}}.$$

для произвольного $f \in P_2(D, m) \setminus L_0(D, m) \setminus L_1(D, m)$. По леммам 5 и 10 имеем

$$\begin{aligned}
|P_2(D, m) \setminus L_0(D, m) \setminus L_1(D, m)| &\geq \\
&\geq |P_2(D, m)| - |L_0(D, m)| - |L_1(D, m)| = 2^{dm} - o(2^{dm}) \sim 2^{dm}.
\end{aligned}$$

при $d \rightarrow \infty$, $\log_2 m = o(d)$, $n \log_2 n = o(d)$. Таким образом, множество, для которого мы получили нижнюю оценку, содержит почти все операторы из $P_2(D, m)$. Лемма доказана.

Теперь приступим к случаю, когда $m \asymp n$. Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$. Введем множество $L_2^c(D, m)$ операторов, реализуемых схемой K так, что $u_r \leq c \left(k_r - \frac{n}{\log_2 |D| - 1} \right)$ для некоторого r .

Лемма 14. *Если $c < \frac{1}{2}$, $\log_2 m = o(|D|)$, $n \log_2 n = o(|D|)$, то*

$$|L_2^c(D, m)| = o(2^{md}) \text{ при } |D| \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Введем числа $a = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + c)$, $b = \frac{c}{a}$. Тогда $\frac{1}{2} > a > c$, $b > 1$. Тогда $c \left(k_r - \frac{n}{\log_2 d} \right) = a \left(\frac{c}{a} k_r - \frac{cn}{a \log_2 d} \right) < a \left(k_r - \frac{bn}{\log_2 d} \right)$.

Рассмотрим оператор $f \in L_2^c(D, m)$, схему K и число r из определения $L_2^c(D, m)$. Заметим, что $(K_r|K) \subseteq I_r \cup O_r$, то есть граничные контакты подсхемы K_r лежат в r -м слое схемы K . Подсхема K_r состоит не менее, чем из k_r компонент связности (в каждой компоненте связности B_r лежит по крайней мере одна компонента связности K_r). Первые k_r компонент связности мы обозначим $K_r^1, \dots, K_r^{k_r}$. Тогда $(K_r^1|K) \sqcup \dots \sqcup (K_r^{k_r}|K) \subseteq (K_r|K) \subseteq I_r \cup O_r$. Поэтому

$$\begin{aligned} a \left(k_r - \frac{bn}{\log_2 d} \right) > u_r &= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in I_r \cup O_r} g_\alpha(x) \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{k_r} \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in (K_r^j|K)} g_\alpha(x). \end{aligned}$$

Значит $\frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in (K_r^j|K)} g_\alpha(x) < a$ для $\frac{bn}{\log_2 d} + 1$ различных j . Значит

для какого-то из этих j в компоненте K_j не больше $\frac{\log_2 d}{b}$ входов схемы K (так как всего n входов). Без ограничения общности можно считать, что это компонента K_r^1 . Обозначим

$$X_0 := \{x \in D : (\forall \alpha \in (K_r^1|K))(g_\alpha(x) = 0)\}.$$

Тогда если $x \notin X_0$, то существует $\alpha \in (K_r^1|K)$ такое, что $g_\alpha(x) = 1$. Поэтому

$$a|D| > \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in (K_r^1|K)} g_\alpha(x) = \sum_{x \in D \setminus X_0} \underbrace{\sum_{\alpha \in (K_r^1|K)} g_\alpha(x)}_{\geq 1} \geq |D \setminus X_0| = d - |X_0|.$$

Значит $|X_0| > d(1 - a)$. Таким образом, все выходы компоненты K_r^1 на $d(1 - a)$ наборах зависят не более, чем от $\frac{\log_2 d}{b}$ входов.

Посчитаем количество операторов, у которых есть хотя бы один выход (обозначим y_0) с таким свойством. Каждый такой оператор f задается следующими объектами.

- j — номер выхода y_0 (число от 1 до m).
- Множество $X_0 \subset D$, содержащее не менее $d(1 - a)$ наборов. Таких множеств не более, чем $\sum_{i=0}^{\lfloor ad \rfloor} C_d^i \leq 2^{dH(a)}$.
- Множество Q , состоящее из $\lfloor \frac{\log_2 d}{b} \rfloor$ входов, от которых зависит оператор $f|_{X_0}$. Таких множеств меньше, чем 2^n .
- Функция $\psi : \{0, 1\}^{|Q|} \rightarrow \{0, 1\}$, $\psi(x_Q) = f_j(x)$, $x \in X_0$ и $\psi(z) = 0$, если $z \neq x_Q$ для всех $x \in D$; таких функций $2^{2^{|Q|}} \leq 2^{d^{1/b}}$. Здесь x_Q обозначает вектор, состоящих из компонент вектора x с номерами из Q .
- Оператор $g = (f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_m)$; таких операторов $(2^{m-1})^d = 2^{d(m-1)}$.

Кроме того, по этим объектам оператор f восстанавливается однозначно, а именно

$$f_j(x) = \begin{cases} \psi(x_Q), & x \in X_0, \\ \psi(x_Q), & x \in D \setminus X_0; \end{cases}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & i < j, \\ g_{i-1}(x), & i > j, \end{cases} \text{ если } 1 \leq i \leq m, i \neq j.$$

Таким образом, получаем, что в $L_2^c(D, m)$ операторов не больше, чем

$$\begin{aligned} m 2^n 2^{d^{1/b}} 2^{dH(a)} 2^{(m-1)d} &= 2^{\log_2 m + n + d^{1/b} + d(m-1 + H(a))} = \\ &= o(2^{md}) \text{ при } d \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

если $\log_2 m = o(d)$, $n = o(d)$, поскольку $H(a) < 1$, $d^{1/b} = \frac{d}{d^{1-1/b}} = o(d)$.

Лемма 15. *Если $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $m \geq 8n$, то*

$$U(f) \geq \frac{m\sqrt{|D|}}{48\sqrt{\log_2 |D|}}.$$

для почти всех операторов $f \in P_2(D, m)$ при $|D| \rightarrow \infty$, если $n \log_2 n = o(|D|)$.

Доказательство. Обозначим $d := |D|$, $l := \log_2 d$.

Положим $c = 0.49$ и возьмем произвольный оператор $f \in P_2(D, m) \setminus L_2^c(D, m) \setminus L_0(D, m)$. Зафиксируем схему K , реализующую f , с наименьшим средним потенциалом. Будем использовать расслоение $(K_r)_{r=0}^{r_0}$. Тогда по определению L_0 , для любого r выполнено

$$\text{если } s_r < \frac{1}{32}md, \text{ то } u_r \geq \frac{m}{3l}.$$

А поскольку $f \notin L_2^c(D, m)$, то $u_r \geq c(k_r - \frac{n}{\log_2 d}) = c(k_r - \frac{n}{l})$.

Таким образом, для всех $r \leq \frac{1}{32}md$ выполнено $u_r \geq \max(c(k_r - \frac{n}{l}), \frac{m}{3l})$.

- Если $k_r \leq \frac{m+3cn}{3cl}$, то $u_r \geq \frac{m}{3l} \geq \frac{mc}{m+3cn}k_r$.
- Если $k_r > \frac{m+3cn}{3cl}$, то $u_r \geq c(k_r - \frac{n}{l}) > ck_r(1 - \frac{3cn}{m+3cn}) = \frac{mc}{m+3cn}k_r$.

$$\frac{mc}{m+3cn} = c\left(1 - \frac{3c}{\frac{m}{n} + 3c}\right) \geq 0.49\left(1 - \frac{1.47}{8 + 1.47}\right) > \frac{1}{3}.$$

Итак, мы показали, что выполнено неравенство

$$u_r \geq \max\left(\frac{m}{3l}, \frac{k_r}{3}\right) \text{ для всех } r \leq \frac{md}{32}.$$

Положим $r_0 := \max\{r : r\varphi(r-1) \leq \frac{m2^n}{256}\}$. Тогда по лемме 7 получаем $s_r \leq 8r\varphi(r-1) \leq \frac{m2^n}{32}$ при $r \leq r_0$.

$$U(K) \geq \sum_{r=0}^{r_0} u_r \geq \max\left(\sum_{r=0}^{r_0} \frac{m}{3l}, \frac{1}{3} \sum_{r=0}^{r_0} k_r\right) \geq \max\left(\frac{m(r_0+1)}{3l}, \frac{\varphi(r_0)}{3}\right). \tag{10}$$

Поскольку $(r_0 + 1)\varphi(r_0) > \frac{md}{256}$, то $\varphi(r_0) > \frac{md}{256(r_0+1)}$. Подставляя в (10), получим

$$U(K) \geq \max\left(\frac{m(r_0 + 1)}{3l}, \frac{md}{3 \cdot 256(r_0 + 1)}\right) \geq \sqrt{\frac{m^2 d}{9 \cdot 256l}} = \frac{m\sqrt{d}}{48\sqrt{l}}. \quad (11)$$

Здесь мы учли, что $\max(az, b/z) \geq \sqrt{ab}$.

Таким образом, если $U(f) \leq \frac{m\sqrt{d}}{48\sqrt{l}}$, то $f \in L_0(D, m) \cup L_2^c(D, m)$, но учитывая леммы 5 и 14,

$$\begin{aligned} |L_0(D, m) \cup L_2^c(D, m)| &\leq |L_0(D, m)| + |L_2^c(D, m)| = \\ &= o(m2^n) \text{ при } n \rightarrow \infty, m = 2^{o(d)}, \end{aligned}$$

то есть доля таких операторов стремится к 0. Лемма доказана.

Учитывая, что при больших d всегда выполнено либо $m \leq 2^{\frac{\sqrt{d}}{41}}$, либо $m > 2^{\frac{\sqrt{d}}{41}} > 8d \geq 8n$, поэтому из леммы 15 и следствия из леммы 13 получается теорема 1.

4.4. Нижние оценки для всюду определенных операторов

Для лемм из этого раздела нельзя сформулировать аналогичные для частичных операторов. Они нужны, чтобы доказать последний случай теоремы 2.

Введем обозначения.

Пусть $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ — булев оператор с n входами и m выходами.

$$\begin{aligned} X_i^j(f) := \{ &x \in \{0, 1\}^{n-1} : f_j(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}) \neq \\ &\neq f_j(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}) \}. \end{aligned}$$

За $F_c(n, m)$ обозначим множество операторов $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ таких, что

$$|X_i^j(f)| > c2^{n-1} \text{ для всех } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Лемма 16. Если $c < \frac{1}{2}$, то $|F_c(n, m)| \sim m2^n$ при $n \rightarrow \infty$ и $m = 2^{o(2^n)}$.

Доказательство. Посчитаем количество элементов в $P(n, m) \setminus F_c$:

$$\begin{aligned} |F_c| &= |P_2(n, m)| - \left| \bigcup_{i,j} \{f : |X_i(f_j)| < c2^{n-1}\} \right| \geq \\ &\geq 2^{m2^n} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |\{f : |X_i(f_j)| < c2^{n-1}\}| = \\ &= 2^{m2^n} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n 2^{(m-1)2^n} |\{f_j : |X_i(f_j)| < c2^{n-1}\}| = \\ &= 2^{(m-1)2^n} (2^{2^n} - mn |\{f_1 : |X_1(f_1)| < c2^{n-1}\}|). \end{aligned}$$

Посчитаем $n_t = |\{f_1 : |X_1(f_1)| = t\}|$. Заметим, что функция f_1 однозначно задается значениями $g(x) = f_1(0, x)$, $x \in \{0, 1\}^{n-1}$ и множеством $X_1 = X_1(f_1) \subseteq \{0, 1\}^{n-1}$, а именно

$$f_1(x_1, x) = \begin{cases} g(x), & x_1 = 0 \vee x \notin X_1, \\ g(x), & x_1 = 1 \wedge x \in X_1. \end{cases}$$

Есть $2^{2^{n-1}}$ различных функций $g(x)$, $x \in \{0, 1\}^{n-1}$ и $C_{2^{n-1}}^t$ различных множеств $X_1 \subseteq \{0, 1\}^{n-1}$ мощности t . Поэтому $n_t = 2^{2^{n-1}} C_{2^{n-1}}^t$, и, поскольку $c < \frac{1}{2}$, то можно применить энтропийное неравенство. Получим

$$\begin{aligned} |\{f_1 : |X_1(f_1)| < c2^{n-1}\}| &< \\ &< \sum_{t=0}^{\lfloor c2^{n-1} \rfloor} n_t = 2^{2^{n-1}} \sum_{t=0}^{\lfloor c2^{n-1} \rfloor} C_{2^{n-1}}^t \leq 2^{2^{n-1}} \cdot 2^{2^{n-1}H(c)}. \end{aligned}$$

Поскольку $H(c) < 1$ при $c < \frac{1}{2}$ (пусть $\delta := 1 - H(c)$), то

$$\begin{aligned} |F_c| &\geq 2^{(m-1)2^n} \left(2^{2^n} - mn2^{2^{n-1}(2-\delta)} \right) = \\ &= 2^{m2^n} \left(1 - n2^{o(2^n)} 2^{-\delta 2^{n-1}} \right) \sim 2^{m2^n} \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $m = 2^{o(2^n)}$. Лемма доказана.

Также введем множество $L_2^c(n, m)$ операторов $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$, реализуемых схемой K так, что $u_r \leq \frac{c}{2}k_r$ и $k_r \geq 2$ для некоторого r .

Лемма 17. $L_2^c(n, m) \cap F_c(n, m) = \emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $f \in L_2^c(n, m)$, схему K и число r с описанными свойствами. Заметим, что $(K_r|K) \subseteq I_r \cup O_r$, то есть граничные контакты подсхемы K_r лежат в r -м слое схемы K . Подсхема K_r состоит не менее, чем из k_r компонент связности (в каждой компоненте связности B_r лежит по крайней мере одна компонента связности K_r). Первые k_r компонент связности мы обозначим $K_r^1, \dots, K_r^{k_r}$. Тогда $(K_r^1|K) \sqcup \dots \sqcup (K_r^{k_r}|K) \subseteq (K_r|K) \subseteq I_r \cup O_r$. Поэтому

$$\frac{c}{2} k_r > u_r = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{\alpha \in I_r \cup O_r} g_\alpha(x) \geq \sum_{j=1}^{k_r} \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{\alpha \in (K_r^j|K)} g_\alpha(x).$$

Значит $\frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{\alpha \in (K_r^j|K)} g_\alpha(x) < \frac{c}{2}$ для некоторого j . Обозначим

$$X_0 := \{x \in \{0,1\}^n : (\forall \alpha \in (K_r^j|K)) g_\alpha(x) = 0\}.$$

Тогда если $x \notin X_0$, то существует $\alpha \in (K_r^j|K)$ такое, что $g_\alpha(x) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2^n \frac{c}{2} &> \sum_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{\alpha \in (K_r^j|K)} g_\alpha(x) = \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^n \setminus X_0} \underbrace{\sum_{\alpha \in (K_r^j|K)} g_\alpha(x)}_{\geq 1} \geq |\{0,1\}^n \setminus X_0| = 2^n - |X_0|. \end{aligned}$$

Значит $|X_0| > 2^n (1 - \frac{c}{2})$.

Для определенности будем считать, что $j = 1$ (иначе можно перенумеровать компоненты связности). Рассмотрим два случая.

I. Компонента связности K_r^1 содержит все входы схемы K . Тогда в схеме $\overline{K_r^1} := K \setminus K_r^1$ нет входов схемы K , значит все ее входы — граничные выходы схемы K_r^1 , то есть лежат в множестве $(K_r^1|K)$. В таком случае, поскольку на множестве X_0 на граничных контактах компоненты K_r^1 выдаетея 0, то на всех входах подсхемы $\overline{K_r^1}$ также будет 0, тогда выход $K_r^2 \subset \overline{K_r^1}$ будет константой $b \in \{0,1\}$ при $x \in X_0$ (пусть это l -й выход схемы). Тогда

$$\begin{aligned} X_1^l &= \left\{ x \in \{0, 1\}^{n-1} : f(0, x) \neq f_l(1, x) \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ x \in \{0, 1\}^{n-1} : f_l(0, x) = \bar{b} \vee f_l(1, x) = \bar{b} \right\} = \\ &= \{(x_2, \dots, x_n) \mid \exists x_1 \in \{0, 1\} : (x_1, \dots, x_n) \notin X_0\}. \end{aligned}$$

Поэтому $|X_1^l| \leq |\{0, 1\}^n \setminus X_0| = 2^n - |X_0| \leq 2^n \frac{c}{2} = c2^{n-1}$. Это означает, что $f \notin F_c(n, m)$.

II. Есть вход схемы K , не лежащий в K_r^1 (пусть это i -й вход оператора f). Рассмотрим какой-нибудь выход компоненты K_r^1 (пусть это l -й выход оператора f). Тогда если $z_b := (x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_i, \dots, x_{n-1}) \in X_0$ при $b = 0, 1$, то все граничные входы K_r^1 нулевые на наборах z_0, z_1 , а на остальные входы подаются одинаковые значения, так как они являются входами схемы K , а наборы z_0 и z_1 различаются лишь в i -й компоненте, а i -й вход K не является входом K_r^1 . Это означает, что входы схемы K_r^1 одинаковые на этих двух наборах, поэтому $f_l(z_0) = f_l(z_1)$. Значит аналогично предыдущему случаю получаем

$$\begin{aligned} X_i^l &= \left\{ x \in \{0, 1\}^{n-1} : f_l(x_1, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \neq f_l(x_1, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \right\} \subseteq \\ &\subseteq \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid \exists x_i \in \{0, 1\} : (x_1, \dots, x_n) \notin X_0\}. \end{aligned}$$

Поэтому $|X_i^l| \leq |\{0, 1\}^n \setminus X_0| \leq c2^{n-1}$. Это означает, что $f \notin F_c(n, m)$.

Следствие 2. Если $c < \frac{1}{2}$, то $|L_2^c(n, m)| = o(m2^n)$ при $n \rightarrow \infty$, $m = 2^{o(2^n)}$.

Доказательство. По лемме 17 имеем $L_2^c(n, m) \cap F_c(n, m) = \emptyset$. Значит

$$\begin{aligned} |L_2^c(n, m)| &\leq |P_2(n, m) \setminus F_c(n, m)| = \\ &= 2^{m2^n} - |F_c(n, m)| = 2^{m2^n} - 2^{m2^n} (1 + o(1)) = o(2^{m2^n}) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $m = 2^{o(2^n)}$. Здесь мы воспользовались леммой 16.

Лемма 18. Для любого оператора $f \in P_2(n, m) \setminus L_2^c(n, m)$ верна оценка

$$U_{T[l, h]}(f) \geq \frac{c}{2} l(m, n).$$

Доказательство. Возьмем произвольную схему $K \in T[l, h]$, реализующую оператор f . Тогда по определению $T(K) \geq l(m, n)$. С другой стороны, поскольку $f \notin L_1^c(m, n)$, то $\forall r (k_r \geq 2 \Rightarrow u_r \geq \frac{c}{2} k_r)$. Значит

$$U(K) \geq \sum_{r:k_r \geq 2} u_r \geq \frac{c}{2} \sum_{r:k_r \geq 2} k_r = \frac{c}{2} \varphi(r' - 1),$$

где $r' = \min \{r : k_r = 1\}$. По лемме 8 получаем $\frac{c}{2} \varphi(r' - 1) \geq \frac{c}{2} T(K) \geq \frac{c}{2} l(m, n)$.

По леммам 5, 10 и 17 множество $P_2(n, m) \setminus L_0(n, m) \setminus L_1(n, m) \setminus L_2^{2/5}(n, m)$ содержит почти все операторы. Поэтому из теоремы 1, а также лемм 15, 9 и 18 получаем теорему 2 с константами $C_1 = C_2 = \frac{1}{660}$, $C_3 = \frac{1}{108}$, $C_4 = \frac{1}{5}$.

Список литературы

- [1] Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1967. — Вып. 19. — С. 285–293.
- [2] Калачев Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретная математика. — 2014. Т. 26, вып. 1. — С. 49–74.
- [3] Чашкин А. В. Лекции по дискретной математике. — М.: МГУ, 2007.
- [4] Klarner D. A., Rivest R. L. A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes // Canadian Journal of Mathematics. — 1973. 25. — P. 585–602.